Anno Accademico 2016/2017
Geometria 1 – Prova scritta del 15/2/2018

Esercizio 1. Fissato $n \geq 2$, sia $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Dati $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$, siano $M_v \in M(n, \mathbb{R})$ e $A_{v,a} \in M(n+1, \mathbb{R})$ le matrici:

$$M_v = \begin{pmatrix} {}^t v \\ 2\,{}^t v \\ \vdots \\ n\,{}^t v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ 2v_1 & 2v_2 & \cdots & 2v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ nv_1 & nv_2 & \cdots & nv_n \end{pmatrix}, \quad A_{v,a} = \begin{pmatrix} M_v & v \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Sia $v^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n |\ {}^t v x = 0\}$ l'ortogonale di v rispetto al prodotto scalare standard.

a) Al variare di $v \in \mathbb{R}^n$, determinare $\mathrm{Im}(M_v)$, $\mathrm{Ker}(M_v)$ e verificare che u_0 è autovettore per M_v.

b) Determinare i $v \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{Im}(M_v - \lambda I) = v^\perp$.

c) Al variare di $v \in \mathbb{R}^n$, calcolare la forma canonica di Jordan, il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di M_v.

d) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, calcolare la forma canonica di Jordan di $A_{v,a}$ nel caso in cui $v \neq 0$ e $u_0 \in v^\perp$.

e) Al variare di $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcolare la forma canonica di Jordan di $A_{v,a}$ nel caso in cui $u_0 \notin v^\perp$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n, b un prodotto scalare non degenere su V.
Indichiamo con $\sigma(b)$ la segnatura di b e con $i_0(b)$ l'indice di nullità di b.

a) Mostrare che, se $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di dimensione k, allora $i_0(b_{|_W}) \leq \min(k, n-k)$.

b) Mostrare che, se b non è definito, per ogni $1 \leq k \leq n-1$ esiste $W \subset V$ sottospazio vettoriale di dimensione k tale che $b_{|_W}$ è degenere.

c) Mostrare che, se esiste un iperpiano $W \subset V$ tale che $b_{|_W}$ è degenere, allora $\sigma(b) = \sigma(b_{|_W}) + (1, 1, -1)$.

d) Mostrare che, se $U \subset W \subset V$ sono due sottospazi vettoriali tali che $\dim W = \dim U + 1$, $i_0(b_{|_U}) = 1$ e $b_{|_W}$ è degenere, allora $Rad(b_{|_U}) \subset Rad(b_{|_W})$.

e) Mostrare che, se esiste un iperpiano $W \subset V$ tale che $b_{|_W}$ è degenere ed esiste $U \subset W$ un sottospazio vettoriale di dimensione $n-2$ tale che $b_{|_U}$ è semi-definito positivo e $i_0(b_{|_U}) = 1$, allora $\det b < 0 \Rightarrow \sigma(b) = (n-1, 1, 0)$.