Anno Accademico 2017/2018
Geometria 1
Seconda prova in itinere
30/5/2018

Esercizio 1.
Sia k un numero intero maggiore di 0 e sia $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Si denoti con $J(\lambda, k) \in M(k, \mathbb{C})$ il blocco di Jordan di taglia k relativo all'autovalore λ:

$$J(\lambda,k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Si determini la forma canonica di Jordan di $J(\lambda, k)^{-1}$.

Sia $A \in GL(n, \mathbb{C})$ e indichiamo con $p_A, q_A \in \mathbb{C}[t]$ il polinomio caratteristico e minimo di A, rispettivamente. Sia $d = \deg q_A$.

b) Mostrare che $p_{A^{-1}}(t) = (-1)^n \frac{t^n}{\det A}\, p_A(\frac{1}{t})$.

c) Mostrare che $q_A(0) \neq 0$.

d) Mostrare che $q_{A^{-1}}(t) = \frac{t^d}{q_A(0)}\, q_A(\frac{1}{t})$.

Esercizio 2.
Sia $M \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice reale di ordine $n > 0$ tale che esiste un intero $k \geq 0$ per cui $M^{k+2} + M^{k+1} + M^k = 0$.

a) Mostrare che $M^{n+2} + M^{n+1} + M^n = 0$.

b) Mostrare che se $k \leq 1$ allora $\operatorname{rk} M$ è pari.

Esercizio 3.
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $2n$, $n > 0$, e sia φ un prodotto scalare su V. Indichiamo con $i_+(\varphi), i_-(\varphi)$ gli indici di positività e negatività di φ, rispettivamente. Dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $i_+(\varphi) = i_-(\varphi) = n \iff$ esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice di φ in tale base è del tipo $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\top & B \end{pmatrix}$, con $0, A, B \in M(n, \mathbb{R})$, $\det A \neq 0$ e $B = B^\top$.

b) $i_+(\varphi) = i_-(\varphi) = n \iff \varphi$ è non degenere ed esistono $W, U \subset V$ sottospazi tali che $V = W \oplus U$ e $\varphi_{|_W}, \varphi_{|_U}$ sono nulli.

Durata: 2 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.