Anno Accademico 2017/2018
Geometria I
Scritto del 16/7/2018

Sia n un un intero positivo fissato.

Esercizio 1. Sia $V \subset M(n, \mathbb{R})$ un sottospazio vettoriale composto di matrici nilpotenti.

a) Dimostrare che $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

b) Dimostrare che esiste un tale V tale che $\dim V = \frac{n(n-1)}{2}$.

c) Siano $A_1, \ldots, A_k \in M(n, \mathbb{R})$ tali che, per ogni $1 \leq i \neq j \leq k$, $A_i^2 = I$ e $A_iA_j + A_jA_i = 0$. Dimostrare che $k \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio V_a, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, soluzione del sistema lineare omogeneo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \; x_1 - x_2 = 0, \; 2x_1 + ax_3 + (2-a)x_4 = 0 \; .$$

Sia inoltre

$$E_a = \{f \in End(\mathbb{R}^4) | \; \forall v \in V_a \setminus \{0\}, \; v \text{ è un autovettore di } f\}.$$

a) Dimostrare che E_a è un sottospazio vettoriale di $End(\mathbb{R}^4)$.

b) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare $\dim E_a$.

Esercizio 3. Per $A \in M(n, \mathbb{R})$, sia $J(A)$ la forma normale di Jordan reale di A.

a) Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ per la quale esiste un intero $k \geq 1$ tale che $A^\top = A^k$. Dimostrare che $J(A)^\top = J(A)^k$.

b) Determinare tutte le possibili forme di Jordan reali delle matrici $A \in M(n, \mathbb{R})$ al variare di A tra le matrici tali che $A^\top = A^2$.

Esercizio 4. (Il testo dato all'esame era diverso!)
Per ogni $B \in M(n, \mathbb{R})$, sia $f_B \colon M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da:

$$f_B(X) = BX - XB \quad \text{per ogni } X \in M(n, \mathbb{R}).$$

Siano $S(n), A(n) \subset M(n, \mathbb{R})$ i sottospazi delle matrici simmetriche e antisimmetriche, rispettivamente. Sia ψ il prodotto scalare su $M(n, \mathbb{R})$ definito da:

$$\psi(X, Y) = \mathrm{tr}(XY^\top) \text{ per ogni } X, Y \in M(n, \mathbb{R}).$$

a) Mostrare che l'aggiunta di f_B rispetto a ψ è $f_{B^\top}$.

b) Mostrare che, se $B \in A(n)$, allora $S(n)$ e $A(n)$ sono sottospazi f_B-invarianti. Nel caso $n \geq 5$, $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, mostrare che $\dim \mathrm{Ker}\, f_B \geq 5$. (Suggerimento: osservare, dimostrandolo, che se $B \neq 0$, il polinomio minimo di B ha grado almeno 3).

c) Mostrare che, se $B \in S(n)$, allora f_B è diagonalizzabile e $\dim \mathrm{Ker}\, f_B \geq n$. (Suggerimento: osservare, dimostrandolo, che se $B' \in M(n, \mathbb{R})$ è simile a B, allora i nuclei di f_B e di $f_{B'}$ hanno la stessa dimensione).

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.