Anno Accademico 2017/2018
Geometria I
Scritto del 6/9/2018

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 2$. Siano W_j, $j = 1, 2, 3$, tre sottospazi vettoriali distinti di V di dimensione 1 e sia

$$E = E(W_1, W_2, W_3) = \{f \in \mathrm{End}(V) |\ f(W_1) = W_2,\ f(W_2) = W_3,\ f(W_3) = W_1\}.$$

a) Provare che $E \neq \varnothing$.

b) Provare che se $f \in E$, allora $W_1 + W_2 + W_3$ è f-invariante e la restrizione di f a $W_1 + W_2 + W_3$ è invertibile.

c) Al variare dei W_j e di f in E, discutere la diagonalizzabilità di f.

d) Rispondere alla stessa domanda del punto precedete nelle stesse ipotesi assumedo però che V e i W_j siano spazi vettoriali complessi e $V = W_1 + W_2 + W_3$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4 e sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Supponiamo che il polinomio caratteristico di f sia $p_f(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ e che l'insieme X dei sottospazi di V di dimensione 2 f-invarianti sia finito.
Dimostrare che X ha esattamente tre elementi.

Esercizio 3. Sia A la matrice reale 2x2 tale che tutte le entrate sono uguali a 1 e sia M la matrice 4x4 diagonale a blocchi con lungo la diagonale due blocchi uguali ad A.
Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da $\varphi(X, Y) = X^\top MY$, per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$. Siano

$$F = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4) |\ \text{per ogni } X, Y \in \mathbb{R}^4,\ \varphi(X, f(Y)) = 0\},$$

$$G = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4) |\ \text{per ogni } X \in \mathbb{R}^4,\ \varphi(X, f(X)) = 0\}$$

a) Determinare la segnatura di ϕ.

b) Dimostrare che F e G sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ e calcolarne la dimensione. (Può essere utile il fatto che le applicazioni bilineari su $\mathbb{R}^4$ che hanno forma quadratica nulla sono alternanti.)

c) Dimostrare che per ogni $g \in G$ esiste $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ aggiunto di g, cioè tale che $\varphi(g(X), Y) = \varphi(X, h(Y))$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$. Mostrare che l'insieme degli aggiunti di g è il sottospazio affine $h + F$.

Esercizio 4. Al variare del parametro a in $\mathbb{R}$, si consideri la conica reale C_a in $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$(a + 1)x^2 - 2xy + ay^2 + 2ax - 2y + 1 = 0$$

a) Al variare del parametro a, determinare il tipo affine della conica C_a.

b) Determinare, se esistono, le coniche C_a con centro sugli assi coordinati.

c) Determinare, se esistono, le coniche C_a isometriche alla conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 + 2y - 1 = 0$.

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.