Anno Accademico 2021/2022
Geometria 1
Prima prova in itinere
10/1/2022

Il seguente NON è il testo dato all'esame.

Sia $\mathbb{K}$ un campo, e siano n, k due numeri interi, $n > 1$, $1 \leq k \leq n$.
Se A_1, A_2 sono matrici quadrate di ordini n_1, n_2 rispettivamente, sia $diag(A_1, A_2)$ la matrice quadrata diagonale a blocchi di ordine $n_1 + n_2$, $diag(A_1, A_2) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Una matrice $P \in GL(n, \mathbb{K})$ si dice ortogonale se $P^{-1} = P^\top$.

Esercizio 1.
Fissata $M \in M(n, \mathbb{K})$, poniamo $W_M = \{A \in M(n, \mathbb{K}) |\ AM = MA^\top\}$.

a) Mostrare che W_M è un sottospazio di $M(n, \mathbb{K})$.

b) Calcolare $\dim W_M$ nel caso $M = diag(I_k, 0)$.

c) Sia $S \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica che commuta con M.
Mostrare che $A \in W_M \Rightarrow SA \in W_{SM}$ e che vale il viceversa se S è invertibile.

d) Mostrare che, per $N \in M(k, \mathbb{K})$, $N' \in M(n-k, \mathbb{K})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda\mu \neq 0$, $W_{diag(\lambda N, \mu N')}$ è isomorfo a $W_{diag(N,N')}$

e) Mostrare che se $Q \in M(k, \mathbb{K})$ è ortogonalmente simile a M, ovvero $Q = PMP^{-1}$ con P ortogonale, allora W_M è isomorfo a W_Q.

f) Nel caso M sia ortogonalmente simile ad una matrice diagonale, calcolare $\dim W_M$ in termini di n e del rango di M. (Potrebbe essere utile dimostrare che le matrici ottenute da I_n permutando le colonne sono ortogonali.)

Esercizio 2.
Sia $n = 2k + 1$ e sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n.
Fissiamo $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ una base di V e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ e poniamo $\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n$.
Sia $f_{\underline{v}} \in \mathrm{End}(V)$ l'endomorfismo definito da $f_{\underline{v}}(\underline{v}_i) = \underline{v}_1 + \underline{v}_n$ se $i \neq k+1$, $f_{\underline{v}}(\underline{v}_{k+1}) = \underline{v}$.

Al variare di $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$:

a) Calcolare la dimensione del nucleo di $f_{\underline{v}}$ ed esibire un supplementare del nucleo di $f_{\underline{v}}$.

b) Calcolare il polinomio caratteristico di $f_{\underline{v}}$.

c) Discutere la diagonalizzabilità di $f_{\underline{v}}$ nel caso $\mathbb{K}$ abbia caratteristica diversa da 2.

d) Discutere la diagonalizzabilità di $f_{\underline{v}}$ nel caso $\mathbb{K}$ abbia caratteristica 2.

Durata: 2 ore e mezzo. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

Esercizio 3.
Sia $n = 2k + 1$.
Date $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, siano $A', B' \in M(n, \mathbb{K})$ tali che $\operatorname{rnk} A' \leq \operatorname{rnk} A$, $\operatorname{rnk} B' \leq \operatorname{rnk} B$.

Dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $\operatorname{rnk}(A + B) \leq \operatorname{rnk} A + \operatorname{rnk} B$.

b) $\operatorname{rnk}(AB) \geq \operatorname{rnk} A + \operatorname{rnk} B - n$.

c) $AB = 0 \;\Rightarrow\; A + A'$ e $B + B'$ non sono entrambe invertibili.

d) $AB = 0 \;\Rightarrow\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\; \det(BA + \lambda B'A + \mu BA' + \lambda\mu B'A') = 0$.