Anno Accademico 2021/2022
Geometria 1
Seconda prova in itinere
30/5/2022

Esercizio 1.
Sia $\mathbb{K}$ un campo e n un intero positivo.
Sia $N \in M(n, \mathbb{K})$ nilpotente con polinomio minimo $\mu_N(t) = t^k$, $1 \leq k \leq n$, e sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ tale che la matrice $\begin{pmatrix} N \\ A \end{pmatrix} \in M(2n, n, \mathbb{K})$ abbia rango n.

a) Dimostrare che $AN^{k-1} \neq 0$.

b) Dimostrare che, per $m \geq 1$, la forma normale di Jordan di N contiene h blocchi di Jordan di ordine m relativi all'autovalore 0 se e solo se la forma normale di Jordan della matrice $\begin{pmatrix} N & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{K})$ contiene h blocchi di Jordan di ordine $m+1$ relativi all'autovalore 0.

Sia ora $B \in M(n, \mathbb{K})$ tale che la matrice $(N \mid B) \in M(n, 2n, \mathbb{K})$ abbia rango n.

c) Mostrare che le matrici $\begin{pmatrix} N & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{K})$ sono simili.

Esercizio 2.
Sia $\mathbb{K}$ un campo.
Per $M \in M(4, \mathbb{K})$ simmetrica sia Φ_M il prodotto scalare su $\mathbb{K}^4$ dato da $\Phi_M(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top M \underline{y}$ per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^4$.
Per $a \in \mathbb{K}$ poniamo

$$M_a = \begin{pmatrix} 3a & -2a & a & a \\ -2a & a & 0 & -a \\ a & 0 & 1 & a \\ a & -a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, determinare i valori di $a \in \mathbb{K}$ per cui Φ_{M_a} è isometrico a $\Phi_{M_a - M_0}$.

b) Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, determinare la segnatura di Φ_{M_a} al variare di $a \in \mathbb{K}$.

c) Per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ il campo con tre elementi, determinare l'indice di Witt di Φ_{M_a} al variare di $a \in \mathbb{K}$.

Durata: 2 ore e mezzo. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

Esercizio 3.
Sia n un intero positivo. Una matrice reale $P \in M(n, \mathbb{R})$ si dice *semidefinita positiva* se $\underline{x}^\top P \underline{x} \geq 0$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.
Dimostrare le seguenti affermazioni:

a) Se $M \in M(n, \mathbb{R})$ è semidefinita positiva e $M = S + A$ con $S \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica e $A \in M(n, \mathbb{R})$ antisimmetrica, allora S è semidefinita positiva e $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} S$.

b) Se $S \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica semidefinita positiva e $A \in M(n, \mathbb{R})$ antisimmetrica sono tali che AS è simmetrica, allora $AS = 0$. (Considerare la restrizione di A agli autospazi di S).

c) Se $B, C \in M(n, \mathbb{R})$ sono semidefinite positive e tali che $B - C$ è simmetrica e $BC = 0$, allora B e C sono simmetriche. (Si noti che una matrice antisimmetrica reale, se pensata a coefficienti complessi, è normale, in particolare anti-Hermitiana).

d) Se $S \in M(n, \mathbb{R})$ è simmetrica, esistono $S_1, S_2 \in M(n, \mathbb{R})$ simmetriche semidefinite positive tali che $S = S_1 - S_2$ e $S_1 S_2 = 0$.