Primo compitino di Analisi Matematica III

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2004/05

Pisa, 11 Novembre 2004

1) Studiare la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+2y^2}}{\log(1+x^2+y^2)},$$

determinandone in particolare i punti critici ed il comportamento della funzione in un intorno di tali punti (stabilendo se si tratta di punti di minimo, di massimo o di sella).

Suggerimento: valutare il comportamento della funzione lungo alcune semplici curve del piano.

2) Determinare i punti di massimo e minimo (ed eventuali punti critici) della funzione

$$f(x,y,z) = xy + yz,$$

sul dominio $A = \{x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\} \cap \{z \geq 0\}$.

3) Dimostrare che l'equazione

$$1 + z^2 + y^2 - e^{x-\pi/2} + \log(1+\cos^2 x) = 0$$

definisce una ipersuperficie passante per il punto $(\pi/2, 0, 0)$ i cui punti si possono rappresentare dall'equazione $x = \phi(y,z)$, ove $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^∞ definita in un aperto $V \subset \mathbb{R}^2$ contenente $(0,0)$.

Stabilire il comportamento di ϕ in un intorno sufficientemente piccolo di $(0,0)$, tracciandone le curve di livello.

4) [**facoltativo**] Sia dato Ω aperto limitato del piano.

1. Stabilire l'esistenza di un cerchio di raggio massimo contenuto nella chiusura $\overline{\Omega}$.
2. Discutere l'unicità di tale cerchio massimo in generale e nel caso in cui Ω sia strettamente convesso (cioè tale che per ogni $x, y \in \overline{\Omega}$ si abbia $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$ per ogni $0 < \lambda < 1$).
3. Si può determinare l'esistenza di un quadrato di lato massimo contenuto in $\overline{\Omega}$?