Secondo compitino di Analisi Matematica III

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2004/05

Pisa, 20 Dicembre 2004

1) Stabilire l'integrabilità della funzione

$$f(x,y,z) = z(3x^2 - 2y^2)\frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

sul dominio $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z \leq 2\,,\ z^2 \leq x^2+y^2\}$ ed in caso affermativo, calcolare l'integrale $\int_D f(x,y,z)\,dxdydz$.

2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si consideri il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito come

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\alpha\, y + \beta x}{x^2+y^2} + e^{-z}\right).$$

Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che F sia conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$. Per gli α e β precedentemente determinati, calcolare il

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} F,$$

dove $\gamma_\varepsilon : [\varepsilon, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $0 < \varepsilon < 2\pi$, è definita dall'equazione

$$\gamma_\varepsilon(t) = (t\,\cos t, t\,\sin t, t^2/2).$$

3) Si consideri la seguente serie di funzioni definite su $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \big(\arctan(x)\big)^n.$$

1. Determinare l'insieme di convergenza puntuale
2. Stabilire la continuità della funzione limite.

   Suggerimento. Può essere utile studiare la convergenza uniforme della serie.

4) [facoltativo] Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $P = (\xi, H) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con $H > 0$. Si consideri il cono generalizzato $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avente come base l'insieme K e come vertice il punto P. Discutere la misurabilità di C e calcolarne il volume.