Compito di Analisi Matematica III

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2004/05

Pisa, 31 Gennaio 2005

1)

a) Calcolare l'integrale

$$\int_D \frac{\sin(x+y)}{1+z^2}\, dxdydz,$$

ove $D = \{(x,y,z) :\ 0 \le 2x \le \pi,\ 0 \le 2y \le \pi\}$.

b) Stabilire l'esistenza ed in caso affermativo calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} \frac{\sin(x+y)}{1+z^2}\, dxdydz,$$

ove $D_n := \left\{(x,y,z) :\ \frac{n}{n+1}x^2 + y^2 + z^2 \le \sqrt{n},\ 0 \le x \le \frac{n\pi}{2n+1},\ \frac{n}{n^2+1} \le 2y \le \pi\right\}$.

2) Dopo aver calcolato esplicitamente la funzione

$$g(a,b,c) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a\sin(x) + b\cos(x) + c\right)^2\, dx$$

ove $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, se ne determinino massimi e minimi sul vincolo

$$M = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 1\}.$$

3) Si considerino le seguenti serie di funzioni, al variare del parametro reale α:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{n^\alpha}\right) - 1\right], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(x+n)^2+n^\alpha}}{n^\alpha}.$$

1. Determinare l'insieme di convergenza puntuale.
2. Stabilire la continuità della funzione limite.

4) [facoltativo] Stabilire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mu(B_r)} \int_{B_r} \left(|x| - [|x|]\right) dx,$$

dove $B_r := \{x \in \mathbb{R}^2 :\ |x| < r\}$, μ denota la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ e $[t]$ denota la *parte intera* di t, per ogni t in $\mathbb{R}$.