Compito di Analisi Matematica I e II

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2003/04

Pisa, 10 Gennaio 2005

N.B.: chi intende sostenere l'esame di Analisi Matematica I e II svolga gli esercizi 2), 6) e 7) ed eventualmente il secondo dei due esercizi facoltativi

I Parte.

1) Determinare per quali α in $\mathbb{R}$ esiste finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - \sin(x)}{\log(1+x) - x\sqrt{1-x} + \alpha x^3}.$$

2) Determinare il numero di soluzioni x non negative dell'equazione

$$y = \frac{|x-2|}{\log\left(\frac{1}{|x-1|}\right)} \tag{1}$$

al variare di y in $\mathbb{R}$.

3) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n - e^{\beta} \right]^{\alpha} \tag{2}$$

al variare di α, β in $\mathbb{R}$.

4) [**facoltativo**] Stabilire se esistono funzioni derivabili e Lipschitziane che non siano di classe C^1.

II Parte.

5) Si calcolino tutte le soluzioni dell'equazione

$$(\star) \qquad x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = x.$$

Al variare di y_0 in $\mathbb{R}$ determinare le soluzioni di $(\star)$ che soddisfano la condizione iniziale $y(0) = y_0$.

6) Si studino le soluzioni della seguente equazione differenziale, al variare dei dati iniziali (x_0, y_0), e se ne tracci un grafico approssimativo:

$$\begin{aligned} y'(x) &= x - \frac{x}{y^2} \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

7) Al variare del parametro $\alpha > 0$, si dica se esiste e, nel caso, si calcoli il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|^\alpha + \log(1 + |y|^{2\alpha})}.$$

8) **[facoltativo]** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ e si consideri il problema

$$\begin{cases} u'(t) &= -f'(u(t)) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

con la condizione $\liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} > -\infty$. Provare che la soluzione u del problema si estende su tutto $[0, +\infty[$. Mostrare che, se $\liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = -\infty$, allora la tesi può non valere.