

## Secondo compitino di Analisi Matematica IV

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2004/05

Pisa, 30 maggio 2005

1) Si consideri la seguente curva, espressa in coordinate polari

$$\rho(\theta) = |\sin(3\theta)| \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

- Si tracci un grafico del supporto della curva.
- Si determini l'area della porzione di piano racchiusa dalla curva.
- Si determini la lunghezza della curva.

2) Si consideri la seguente applicazione  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\phi(x, y) = \left( -x + \sqrt{2} \sin(y), y + \sqrt{2} \cos(x) \right).$$

- Si determini il luogo dei punti critici della funzione  $\phi$ , tracciandone un grafico qualitativo.
- Si determini l'immagine della funzione.
- Si dica se la funzione è globalmente invertibile, giustificando la risposta.

3) Si consideri l'insieme  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  definito dalle equazioni

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + z^2 = 1.$$

- Si dica nell'intorno di quali punti l'insieme  $\Gamma$  è il supporto di una curva regolare.
- Si trovino il massimo e il minimo su  $\Gamma$  della funzione  $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ , al variare dei parametri reali  $a, b, c$ .

4) [facoltativo] Si consideri il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 u(t)(u'(t))^2 dt,$$

definito sull'insieme delle funzioni  $u \in C^1([0, 1])$  tali che  $u(0) = \alpha \geq 0$  e  $u(1) = \beta \geq 0$ .

- Si mostri che il funzionale  $F$  non ammette nessun minimo assoluto.
- Si mostri che il funzionale  $F$  ammette minimo sotto l'ulteriore vincolo  $u(t) \geq 0$  per ogni  $t \in (0, 1)$ .
- Si calcoli esplicitamente tale minimo, al variare dei parametri  $\alpha, \beta$ .