Compito di Analisi Matematica III e IV

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2004/05

Pisa, 4 luglio 2005

N.B. Chi intende sostenere l'esame di Analisi Matematica III e IV svolga gli esercizi 1), 5) e 6) (ed eventualmente il primo dei due esercizi facoltativi)

I Parte.

1) Si consideri l'insieme

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1 \ \text{ e } \ y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

e la funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2z - z^2 - y^2}}.$$

Si dimostri l'integrabilità di f su A e si calcoli l'integrale $\int_A f(x, y, z)dxdydz$.

2) Al variare di $a, b, c > 0$ si determinino il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y, z) = \sin(xyz) \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

sul vincolo

$$M = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\Big\}.$$

3) Al variare di α in $\mathbb{R}$, si studi la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti serie di funzioni

$$a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x}{n^\alpha},$$

$$b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}.$$

4) [facoltativo] Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e si supponga che f abbia esattamente 3 punti critici sul vincolo $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

1. Si mostri che tali punti sono necessariamente un massimo, un minimo ed un punto di sella.
2. Si mostri con un esempio che la tesi precedente non è più vera se si considerano punti critici liberi in $\mathbb{R}^2$.

II Parte.

5) Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x - \frac{y}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

a) Calcolare esplicitamente una base di soluzioni.

b) Tracciare le orbite del sistema.

6) Si consideri l'insieme di punti S_λ in $\mathbb{R}^3$ definito dal seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2/2 = 1 \\ 3x^2 + y^2/2 + z^2/2 = \lambda \end{cases} . \tag{2}$$

1. Si determini l'insieme $\mathcal{N}$ di tutti i valori di $\lambda \geq 1$ tali che S_λ è non vuoto.

2. Si determini il sottoinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathcal{N}$ tale che S_λ è una sottovarietà di dimensione uno per ogni λ in $\mathcal{S}$.

3. Determinare la massima e minima distanza dei punti di S_λ dall'origine quando $\lambda \in \mathcal{S}$.

7) Si calcoli la superficie del solido

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x+1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ \text{ e } \ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}. \tag{3}$$

8) **[facoltativo]** Si consideri l'equazione differenziale $y'' = f(y)$ ove $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Provare che ogni soluzione non identicamente nulla ha un numero finito di zeri su ogni intervallo compatto.