Compito di Analisi Matematica III e IV

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2004/05

Pisa, 5 settembre 2005

N.B.: chi intende sostenere l'esame di Analisi Matematica III e IV svolga gli esercizi 1), 3) e 6) ed eventualmente l'esercizio 7).

I Parte.

1) Siano $\alpha, \beta > 0$ e si considerino l'insieme

$$A_\beta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0, \ 1 > z^\beta > x^2 + y^2\right\}$$

e la funzione $f_\alpha : A \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2 + z^\alpha}.$$

Determinare i valori di α e β tali che f_α è integrabile su A_β e per tali valori calcolare l'integrale $\int_{A_\beta} f_\alpha(x,y,z)dxdydz$ restringendosi al caso $\beta = 1$.

2) Si consideri l'insieme

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2^x + 2^y = 2\right\}.$$

a) Si determini la massima e la minima distanza dell'insieme dall'origine di $\mathbb{R}^2$.

b) Si tracci un disegno approssimativo dell'insieme.

3) Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti serie di funzioni

$$a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^\alpha x^2 + 1}, \quad \text{ove} \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

$$b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \lg(nx)}{n} \sin\left[\frac{1}{x^2+n^2}\right]. \tag{2}$$

II Parte.

4) Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x' = 2y - 3x \\ y' = -2x + y. \end{cases} \tag{3}$$

a) Calcolare esplicitamente una base di soluzioni.

b) Tracciare le orbite del sistema.

5) Si consideri la curva

$$\gamma(t) = \big(2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t)\big).$$

a) Si calcoli l'area della porzione di piano racchiusa dalla curva.

b) Si tracci l'immagine della curva.

6) Si consideri la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \big(\log(x_i) - 1\big), \qquad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_i > 0 \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Si studi l'esistenza e l'unicità dei punti di massimo e minimo della funzione f sul vincolo

$$M = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^{n} x_i = n, \ \sum_{i=1} \beta_i(x_i - 1) = 0\Big\},$$

dove $\beta_1, \dots, \beta_n$ sono numeri reali tali che $\max_{i=1,\dots,n}\{|\beta_i|\} > 0$.

7) [facoltativo] Data $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si provi la periodicità di ogni soluzione dell'equazione

$$y'' = f(y)$$

tale che in almeno tre punti distinti assuma lo stesso valore.