

Pisa, 13 luglio 2007

1) Si dica se la forma differenziale

$$\frac{((x+1)^2 - \sin^2 y) dx - \sin(2y) dy}{x^2 + \cos^2 y}$$

è esatta e, nel caso, se ne calcoli la primitiva.

2) Si consideri la trasformazione  $F : (x, y) \mapsto (X, Y)$  definita da

$$F : \begin{cases} X = x^2 - y^2 \\ Y = xy. \end{cases}$$

a) Si dica nell'intorno di quali punti  $(x, y)$  la trasformazione è invertibile.

b) Si calcoli l'area dell'insieme  $F(B_1)$ , dove  $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

3) Si consideri la curva piana di equazione

$$f(x, y) = e^{2xy-1/2} - x - y = 0.$$

a) Si trovino le intersezioni della curva con gli assi cartesiani e si determinino le rette tangenti alla curva in tali punti.

b) Si dica se la curva ha punti singolari (cioè punti nell'intorno dei quali l'equazione della curva non definisce una variabile in funzione dell'altra) e, nel caso, si trovino tali punti.

c) Detto  $(x_0, y_0)$  uno dei punti singolari della curva precedentemente trovati, si dica se la funzione  $f(x, y)$  ha in  $(x_0, y_0)$  un massimo o un minimo o un punto di sella.