

1. (a) Si trovino tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

- (b) Per quali valori dei dati iniziali  $x(0) = \alpha$ ,  $y(0) = \beta$ , la soluzione  $(x(t), y(t))$  converge a un limite per  $t \rightarrow +\infty$ ?

- (c) **(facoltativo)** Si trovino tutte le soluzioni del sistema non omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - e^{-t} \\ \dot{y} = x - y - e^t. \end{cases}$$

2. Al variare dei punti  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ , soggetti al vincolo

$$|P_1| + |P_2| + |P_1 - P_2| = 1,$$

si calcoli, motivando la risposta, l'area massima del triangolo avente per vertici l'origine e i punti  $P_1, P_2$ .

3. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}.$$

- (a) Ponendo  $\alpha = 1$ , si dica se la funzione  $f$  è integrabile sul dominio

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \left( e^{x^2+y^2} - 1 \right) \leq 1 \right\}.$$

- (b) Si dica per quali valori del parametro reale  $\alpha$  la funzione  $f$  è integrabile sul dominio  $D$ .