

ESERCIZI

ESERCIZIO 1. Dimostrare o trovare un controesempio alla seguente proposizione:

$$2^\alpha > \alpha \quad \forall \alpha \in \text{Ord.}$$

ESERCIZIO 2. Studiare la convergenza della successione per ricorrenza $\alpha_n \in \text{Ord}$

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \omega^{\alpha_n} \\ \alpha_0 &= 1.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3. Studiare la convergenza della successione per ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \sin(x_n),$$

al variare del dato iniziale x_0 .

ESERCIZIO 4. Studiare la convergenza della successione per ricorrenza

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n \sqrt{\frac{2x_n}{x_n + x_{n-1}}} \\ x_{-1} &= \frac{15}{16} \\ x_0 &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Suggerimento. Mostrare che vale la relazione

$$x_n = \frac{2^{2^{-n}} - 2^{-2^{-n}}}{2 \cdot 2^{-n}}.$$

ESERCIZIO 5. Studiare la convergenza della successione per ricorrenza

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n,$$

al variare dei dati iniziali $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$. Discutere l'esistenza di orbite periodiche.

ESERCIZIO 6. Studiare le soluzioni dell'equazione a variabili separabili

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(y+1) \sinh(t)}{(y+1) \log(y+1) + y} \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

al variare dei dati iniziali (t_0, y_0) , tracciandone un grafico qualitativo. Determinare i dati iniziali per cui le soluzioni sono definite su tutto \mathbb{R} .

ESERCIZIO 7. Studiare le soluzioni dell'equazione a variabili separabili

$$\begin{aligned}y' &= (y^2 - 1) e^t \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

al variare dei dati iniziali (t_0, y_0) , tracciandone un grafico qualitativo.

ESERCIZIO 8. Studiare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\begin{aligned}y' &= e^y - e^t \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

al variare dei dati iniziali (t_0, y_0) , tracciandone un grafico qualitativo. Mostrare l'esistenza di una soluzione monotona, definita su tutto \mathbb{R} .