III APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. dell'Energia

A.A. 2008/2009, 3 Luglio 2009

Cognome e Nome: ....

Matricola: .... Squadra: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*4.5 punti*] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n\to\infty} n^4 \left(\exp\left(\frac{1}{2n^2}\right) - \sqrt{1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right).$$

(Si ricordi lo sviluppo asintotico $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16}$ per $y \to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico di $\exp\left(\frac{1}{2n^2}\right) - \sqrt{1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$:

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [*4.5 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [*9 punti*] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \ln x \big|1 + \ln x\big| \, .$$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$\mathrm{Dom}(f) =$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$f'(x) =$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

(v) Calcolare la derivata seconda della funzione

$f''(x) =$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

(vi) Determinare l'immagine di f :

$\mathrm{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_1^e \frac{dx}{x\big(1+(\ln x)^2\big)}$$

esplicitando i passaggi principali ed i metodi di risoluzione utilizzati.

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{1+y}{1+x^2}\,. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$\varphi_c(x) =$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$\psi_c(x) =$

(iii) Determinare se esiste una soluzione $x \mapsto \psi(x)$ dell'equazione completa (1) che soddisfa la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 1\,.$$

$\psi(x) =$

ESERCIZIO 6. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = (y-x)\, e^{-(x^2+y^2)}\,.$$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$\mathrm{Dom}(f) =$

(ii) Calcolare le derivate parziali della funzione

$f_x(x,y) =$

$f_y(x,y) =$

e determinare eventuali punti critici di f:

(iii) Calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinare la natura dei punti critici di f .

(iv) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, -e^{-1})$: