COGNOME:	*NOME*:	*MATR.*:

ANALISI REALE E COMPLESSA 2^o appello — 13/2/2012

Facoltà di Ingegneria, Area dell'Informazione

E.1) Data la distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definita da

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\delta(x - \log k),$$

mostrare che $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

E.2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ \\ -1 & \text{se } 1 < |x| < \pi \end{cases}$$

calcolare la serie di Fourier della prolungata 2π-periodica di f.
Dedurre la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2}\,.$$

E.3) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } |x| \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \\ 0 & \text{se } |x| \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni.
Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}$ e dire per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$.
Calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\pi x)}{1 - 4x^2}\,dx.$$

E.4) Data $c \in \mathbb{R}$ sia

$$f_c(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + c^2)} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Classificare le singolarità di f_c e calcolare i residui in tali punti.
Dire per quali valori del parametro c l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + c^2)}\,dx$$

è convergente e, nel caso, calcolarne il valore.

SOLUZIONI

E.1) Notiamo che è sufficiente mostrare che $\langle u, v_n\rangle \to 0$ quando $n \to +\infty$, per ogni successione (v_n) in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che $v_n \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Presa quindi una tale successione (v_n), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che

$$\|(1+x^2)v_n(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Si ha quindi

$$|\langle u, v_n\rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|v_n(\log k)|}{k} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+(\log k)^2)} \leq C\varepsilon$$

per ogni $n \geq n_\varepsilon$, dove

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+(\log k)^2)} < +\infty.$$

Da questo segue che $\langle u, v_n\rangle \to 0$ per $n \to +\infty$.

E.2) Essendo la funzione pari, continua e regolare a tratti, possiamo esprimerla nella seguente serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} - 2 & \text{se } k = 0 \\[2ex] \dfrac{2(1-\cos(k))}{\pi k^2} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

e quindi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} - 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k)}{k^2}\cos(kx).$$

Calcolando la serie in $x = 0$ si ha

$$f(0) = 0 = \frac{1}{2\pi} - 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k)}{k^2}.$$

Ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \pi^2/6$ otteniamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

E.3) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] 0 & \text{se } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Derivando un'altra volta si ha $f''(x) = \delta(x - \pi/2) + \delta(x + \pi/2) - f(x)$. Applicando la trasformata di Fourier a questa uguaglianza otteniamo

$$\hat{f''}(\lambda) = -\lambda^2 \hat{f}(\lambda) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\lambda\right) - \hat{f}(\lambda)$$

e quindi

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\lambda\right)}{1 - \lambda^2}.$$

Osserviamo che $\hat{f}(\lambda)$ ha discontinuità eliminabili in $\lambda = \pm 1$ e $\hat{f}(\lambda) \to 0$ per $\lambda \to +\infty$, da cu segue $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre, visto che $|\hat{f}(\lambda)|$ si comporta come $1/|\lambda|^2$ per $\lambda \to +\infty$, si ha anche $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

Concludiamo l'esercizio osservando che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\pi x)}{1 - 4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\lambda\right)}{1 - \lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\,d\lambda = \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

E.4) Distinguiamo due casi:

a) $c = 0$: in questo caso la funzione ha un polo di ordine tre in $z = 0$. Dallo sviluppo in serie di Taylor di e^{iz} si ottiene subito

$$\operatorname{res}(f, 0) = \frac{i^2}{2!} = -\frac{1}{2}.$$

b) $c \neq 0$: in questo caso la funzione ha tre poli semplici in $z = 0$ e $z = \pm i|c|$ con residui

$$\operatorname{res}(f, 0) = \frac{1}{c^2} \qquad \operatorname{res}(f, i|c|) = -\frac{e^{-|c|}}{2c^2} \qquad \operatorname{res}(f, -i|c|) = -\frac{e^{|c|}}{2c^2}\,.$$

L'integrale è convergente per ogni $c \neq 0$ e si ha, grazie al Teorema dei Residui e al Lemma di Jordan,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + c^2)}\,dx = \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + c^2)}\,dx = 2\pi \operatorname{res}(f, i|c|) + \pi \operatorname{res}(f, 0) = \frac{\pi}{c^2}\left(1 - e^{-|c|}\right).$$