COGNOME:	*NOME*:	*MATR.*:

ANALISI REALE E COMPLESSA 1^o appello — 30/1/2012

Facoltà di Ingegneria, Area dell'Informazione

E.1) Dato $p \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare

$$T[f](x) = \frac{f(x)}{1+|x|^p} \qquad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dire per quali valori del parametro p l'applicazione T è continua da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$.

E.2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \le 1 \\ 2-|x| & \text{se } 1 < |x| \le 2 \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$$

calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni.
Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}$ e dire per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$.
Calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2x) - 2\cos(x) + 1}{x^2}\, dx.$$

E.3) Data $c \in \mathbb{R}$ sia

$$f_c(z) = \frac{e^z + c}{z^3 + 2iz^2 - z} \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Classificare le singolarità di f_c e calcolare i residui.
Al variare del parametro c calcolare l'integrale

$$\int_\gamma f_c(z)\, dz$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 3, percorsa in senso antiorario.

E.4) Dire se il seguente problema ammette soluzione e, nel caso, calcolarla.

$$\begin{aligned} &u''(t) + u(t) = |t| - \pi \qquad t \in (-\pi, \pi) \\ &u(-\pi) = 0 \\ &u(\pi) = 0. \end{aligned}$$

SOLUZIONI

E.1) Essendo l'applicazione lineare, per avere la continuità di T è sufficiente mostrare la disuguaglianza

$$\|T[f]\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

per qualche $C > 0$ e per tutte le $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\int_R |T[f]|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|^p}\, dx \leq \left\| \frac{1}{1+|x|^p} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} .$$

Poiché $1/(1+|x|^p) \in L^2(\mathbb{R})$ se e solo se $p > 1/2$ otteniamo che T è continua per $p > 1/2$. Viceversa, se $p \leq 1/2$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^{1-p}\log|x|}$$

appartiene a $L^2(\mathbb{R})$, ma $T[f] \notin L^1(\mathbb{R})$.

E.2) Nel senso delle distribuzioni si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \chi_{[-2,-1]} + \chi_{[0,1]} - \chi_{[-1,0]} + \chi_{[1,2]} \\ f''(x) &= \delta(x+2) - 2\delta(x+1) + 2\delta(x) - 2\delta(x-1) - \delta(x-2) . \end{aligned}$$

Dall'espressione della derivata seconda otteniamo

$$\hat{f''}(\lambda) = 2\cos(2\lambda) - 4\cos(\lambda) + 2$$

e quindi

$$\hat{f}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\hat{f''}(\lambda) = -\frac{2}{\lambda^2}(\cos(2\lambda) - 2\cos(\lambda) + 1)$$

Osserviamo che $\hat{f}$ ha una discontinuità eliminabile in $\lambda = 0$ e vale $\lim_{\lambda\to 0} \hat{f}(\lambda) = 2$. In particolare, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e quindi $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Infine, per la formula di inversione abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2x) - 2\cos(x) + 1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\, d\lambda = -\pi f(0) = 0.$$

E.3) Osserviamo che $z^3 + 2iz^2 - z = z(z+i)^2$ e distinguiamo due casi:

a) $c \neq -1$. In questo caso f_c ha un polo semplice in $z = 0$, un polo doppio in $z = -i$ e si ha

$$\begin{aligned} &\mathrm{res}(f_c, 0) = -c - 1 \\ &\mathrm{res}(f_c, -i) = \lim_{z\to -i} \left(\frac{e^z + c}{z}\right)' = \lim_{z\to -i} \frac{ze^z - e^z - c}{z^2} = ie^{-i} + e^{-i} + c\, . \end{aligned}$$

b) $c = -1$. In questo caso f_{-1} ha una singolarità eliminabile in $z = 0$, un polo doppio in $z = -i$ e si ha

$$\mathrm{res}(f_{-1}, -i) = \lim_{z\to -i} \frac{ze^z - e^z + 1}{z^2} = ie^{-i} + e^{-i} - 1\, .$$

Grazie al Teorema dei Residui, per ogni $c \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\int_\gamma f_c(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{res}(f_c,0) + \mathrm{res}(f_c,-i)) = 2\pi i(ie^{-i} + e^{-i} - 1)\,.$$

E.4) Osserviamo che una soluzione $u(t)$ del problema può essere viste come restrizione all'intervallo $(-\pi,\pi)$ di una soluzione 4π-periodica $v(t)$ dell'equazione

$$v''(t) + v(t) = |t| - \pi \qquad t \in (-2\pi, 2\pi)\,.$$

Chiamando $f(t)$ l'estensione 4π-periodica della funzione $|t|-\pi$, abbiamo lo sviluppo in serie di Fourier

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\left(\frac{n}{2}t\right) \qquad \text{dove} \qquad f_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (t-\pi)\cos\left(\frac{n}{2}t\right)\,dt = \frac{4((-1)^n - 1)}{n^2\pi}\,.$$

Sviluppando anche la funzione $v(t)$ in serie di Fourier

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n}{2}t\right) + b_n\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\right)$$

otteniamo

$$v''(t) + v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{n^2}{4}\right)\left(a_n\cos\left(\frac{n}{2}t\right) + b_n\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\cos\left(\frac{n}{2}t\right)\,.$$

Le condizioni che devono essere soddisfatte dai coefficienti a_n, b_n sono quindi $b_n = 0$ per ogni n e

$$a_0 = 0 \qquad\qquad a_n = \frac{4f_n}{4-n^2} = \frac{16((-1)^n - 1)}{(4-n^2)n^2\pi} \qquad \text{per } n \geq 1\,.$$

La soluzione del problema di partenza è quindi

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{32}{(4-(2k+1)^2)(2k+1)^2\pi}\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) = |t| - \pi - \frac{t\sin(t)}{|t|}$$

dove abbiamo posto $n = 2k+1$.

Si osservi che non esistono soluzioni 2π-periodiche del problema, infatti, se così fosse, potremmo sviluppare in serie di Fourier le funzioni $u(t)$ e $|t|-\pi$ e otteremmo, per $t \in (-\pi,\pi)$,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) \\ u''(t) + u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-n^2)a_n\cos(nt) = |t| - \pi = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}\cos(nt)\,. \end{aligned}$$

Ne seguono le condizioni

$$a_0 = -\pi \qquad\qquad (1-n^2)a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi} \qquad \text{per } n \geq 1\,,$$

che non hanno soluzione quando $n = 1$.