Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

6 settembre 2016

Esercizio 1. Siano E uno spazio di Banach, V un suo sottospazio e

$$V^\perp = \{f \in E^\star : \langle f, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in V\}.$$

i) Mostrare che $V^\perp$ è chiuso nella topologia debole* di $E^\star$.

ii) Fissato $f_0 \in E^\star$, provare che esiste $g_0 \in V^\perp$ tale che

$$\|f_0 - g_0\| = \inf_{g \in V^\perp} \|f_0 - g\|\,.$$

Esercizio 2. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in L(H)$ un operatore autoaggiunto.

i) Mostrare che $\|T\| = \sup_{|u|\le 1} |\langle Tu, u\rangle|$.

ii) Dedurre che $\|T\| \in \sigma(T)$ o $-\|T\| \in \sigma(T)$.

iii) Mostrare che, se T è anche compatto, allora $\|T\| \in VP(T)$ o $-\|T\| \in VP(T)$.

Esercizio 3. Si consideri l'operatore $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definito da

$$Tu(x) = \int_0^x u\big(\sqrt{t}\big)\, dt \qquad u \in L^2(0,1).$$

i) Mostrare che T è lineare e continuo.

ii) Mostrare che T manda $L^2(0,1)$ in $H^1(0,1)$ con continuità. Dedurre che T è compatto.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

i) Poiché l'insieme $\{f \in E^\star : \langle f, v \rangle = 0\}$ è chiuso nella topologia debole* per ogni $v \in E$, si ottiene subito che $V^\perp$ è debole* chiuso.

ii) Dobbiamo mostrare che la funzione $F(g) = \|f_0 - g\|$ ammette minimo su $V^\perp$. Osserviamo che la funzione F è coerciva e inferiormente semicontinua rispetto alla topologia debole*. Inoltre $V^\perp$ è debole* chiuso e quindi $V^\perp \cap B_R$ è debole* compatto per ogni $R > 0$, per il Teorema di Banach-Alaoglu. Pertanto la funzione F ammette minimo su $V^\perp \cap B_R$ per ogni $R > 0$ ma, essendo F coerciva, tale minimo è anche un minimo assoluto di F per R abbastanza grande.

Soluzione esercizio 2.

i) Si ha subito $\sup_{|u| \le 1} |\langle Tu, u \rangle| \le \|T\|$, mostriamo quindi l'altra disuguaglianza. Notiamo che, per ogni $u, v \in H$ si ha

$$\begin{aligned} 2\langle Tu, v\rangle + 2\langle u, Tv\rangle &= \langle T(u+v), u+v\rangle - \langle T(u-v), u-v\rangle \\ &\le \big|\langle T(u+v), u+v\rangle\big| + \big|\langle T(u-v), u-v\rangle\big|. \end{aligned}$$

Scegliendo $v = t\,Tu$ per $t > 0$ e ponendo $\sigma := \sup_{|u|\le 1} |\langle Tu, u\rangle|$, otteniamo

$$|Tu|^2 \le \sigma \, \frac{|u^2| + t^2 |Tu|^2}{2t} \, .$$

Sia ora $u \in H$ tale che $Tu \neq 0$. Scegliendo $t := |u|/|Tu|$, la disuguaglianza precedente diventa $|Tu| \le \sigma |u|$, che implica $\|T\| \le \sigma = \sup_{|u|\le 1} |\langle Tu, u\rangle|$.

ii) Segue dal punto precedente e dal fatto che $\sup_{|u|\le 1}\langle Tu, u\rangle \in \sigma(T)$ e $\inf_{|u|\le 1}\langle Tu, u\rangle \in \sigma(T)$, poiché T è autoaggiunto.

iii) Supponiamo che $\|T\| = \sup_{|u|\le 1}\langle Tu, u\rangle$, vogliamo mostrare che $\sup_{|u|\le 1}\langle Tu, u\rangle \in VP(T)$. Possiamo supporre che $\|T\| > 0$, altrimenti la tesi è ovvia.
Sia ora $u_n \in H$ una successione tale che $|u_n| = 1$ per ogni n e $\lim_n \langle Tu_n, u_n\rangle = \|T\|$. Dato che T è compatto, possiamo supporre che $\lim_n Tu_n = v \in H$, con $v \neq 0$ Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} 0 &\le \lim_n \big|Tu_n - \|T\| u_n\big|^2 \\ &= \lim_n \big(|Tu_n|^2 - 2\|T\|\langle Tu_n, u_n\rangle + \|T\|^2 |u_n|^2\big) \\ &\le 2\|T\|^2 - 2\|T\| \lim_n \langle Tu_n, u_n\rangle = 0 \, . \end{aligned}$$

Poiché $\lim_n Tu_n = v$, otteniamo che $\lim_n u_n = v/\|T\|$ e quindi $Tv = \|T\| v$, cioè $\|T\| \in VP(T)$.

Soluzione esercizio 3.

i) La linearità segue subito dalla linearità dell'integrale. Per mostrare la continuità di T osserviamo che, per ogni $u \in L^2(0,1)$, possiamo scrivere

$$Tu(x) = \int_0^{\sqrt{x}} 2y\, u'(y)\, dy \le 2\, \|x\|_{L^2}\, \|u\|_{L^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, \|u\|_{L^2},$$

da cui segue la continuità di T.

ii) Osserviamo prima di tutto che, per ogni $u \in L^2(0,1)$, la funzione $v(x) = u(\sqrt{x})$ sta in $L^2(0,1)$. Infatti, possiamo scrivere

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^1 u^2(\sqrt{x})\, dx = \int_0^1 2y\, u^2(y)\, dy \le C\|u\|_{L^2}^2.$$

Dalla definizione di T si ha subito che $(Tu)' = v \in L^2(0,1)$, quindi l'immagine di T è contenuta in $H^1(0,1)$, e T manda $L^2(0,1)$ in $H^1(0,1)$ con continuità.
A questo punto, la compattezza di T segue dall'immersione compatta di $H^1(0,1)$ in $L^2(0,1)$.