Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

31 gennaio 2017

Esercizio 1. Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare e continuo fra due spazi di Banach X, Y e sia $f : Y \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $T(X) = N(f)$.

i) Provare che esiste un elemento $u \in Y$ tale che l'operatore $T' : X \times \mathbb{R} \to Y$, definito da $T'(x,t) := Tx - tu$, è surgettivo.

ii) Provare che f è continua.

Esercizio 2. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $F : H \to \mathbb{R}$ una funzione continua e coerciva, cioè tale che

$$\lim_{|x|\to\infty} F(x) = +\infty.$$

i) Mostrare che, se F è convessa, esiste $x \in H$ punto di minimo per F.

ii) Mostrare con un esempio che l'esistenza di un minimo non è garantita se F non è convessa.

Esercizio 3. Data una funzione $f \in L^1(0, +\infty)$, sia $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore definito da

$$T(x)_n := \left(\int_n^{n+1} f(x)\, dx \right) x_n \qquad \forall x \in \ell^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostrare che T è lineare e continuo.

ii) Calcolare la norma di T.

iii) Dire se T è un operatore compatto.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1. Osserviamo prima di tutto che, se $f = 0$, allora T è surgettivo e non c'è niente da dimostrare.

i) Poiché $N(f)$ è un sottospazio di Y di codimensione 1, esiste $u \neq 0$ tale che $Y = \langle N(f), u \rangle$ e questo implica che l'operatore T' è surgettivo.

ii) Per il Teorema della mappa aperta esiste $r > 0$ tale che $T'(B_1^X \times (-1,1)) \supset B_r^Y$. In particolare si ha che

$$\sup_{y \in B_r^Y} f(y) \leq \sup_{(x,t) \in B_1^X \times (-1,1)} f(T'(x,t)) \leq |f(u)|,$$

cioè f è continua.

Soluzione esercizio 2.

i) Osserviamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, gli insiemi $C_t := x \in H : F(x) \leq t$ sono convessi chiusi e limitati e quindi debolmente compatti per il teorema di Banach-Alaoglu. Pertanto l'insieme $C := \cap_{t > \inf_H F} C_t$ è diverso dal vuoto e ogni elemento di C è un punto di minimo per F.

ii) Sia $F : \ell_2 \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x_n - 1}{n}\Big)^2 \qquad \forall x \in \ell^2.$$

È facile verificare che F è continuo, coercivo e $\inf_{\ell^2} F = 0$, ma l'estremo inferiore non è raggiunto, poiché si dovrebbe avere $x_n = 1$ per ogni n.

ii-bis) Sia $F : H_0^1(0,1) \to R$ il funzionale definito da

$$F(u) := \int_0^1 \Big(\big(|u'(x)| - 1\big)^2 + u(x)^2 \Big)\, dx \qquad \forall u \in H_0^1(0,1).$$

È facile verificare che F è continuo, coercivo e che $F(u) > 0$ per ogni $u \in H_0^1(0,1)$. Considerando una successione di funzioni $u_n \in H_0^1(0,1)$ tali che $|u_n'(x)| = 1$ per quasi ogni $x \in [0,1]$ e $u_n \to 0$ uniformemente su $[0,1]$ per $n \to \infty$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 u_n(x)^2\, dx = 0.$$

Abbiamo mostrato che $\inf_{H_0^1(0,1)} F = 0$ e quindi F non ammette minimo in $H_0^1(0,1)$.

Soluzione esercizio 3.

i) La linearità di T segue subito dalla definizione. Per mostrare la continuità di T poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n := \int_n^{n+1} f(x)dx$ e osserviamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Di conseguenza otteniamo che

$$\|T(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 x_n^2 \leq (\max_n |a_n|)^2 \|x\|_{\ell^2}^2$$

e quindi T è continuo con $\|T\| \leq \max_n |a_n|$.

ii) Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{\bar{n}} = \max_n |a_n|$ e sia $\bar{x} \in \ell^2$ tale che $\bar{x}_{\bar{n}} = 1$ e $\bar{x}_n = 0$ per ogni $n \neq \bar{n}$. Si ha $T(\bar{x}) = a_{\bar{n}}\bar{x}$ e quindi $\|T(\bar{x})\|_{\ell^2} = (\max_n |a_n|)\|\bar{x}\|_{\ell^2} = \max_n |a_n|$. Questo mostra che $\|T\| = \max_n |a_n|$.

iii) Per $N \in \mathbb{N}$, poniamo T_N l'operatore definito da $T_N(x)_n := a_n x_n$ se $n \leq N$ e $T_N(x)_n := 0$ se $n > N$. Osserviamo che l'operatore T_N ha rango finito e che

$$\|T - T_N\|^2 = \sup_{x:\, \|x\|_{\ell^2} \leq 1} \|T(x) - T_N(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n>N} a_n^2 x_n^2 \leq \max_{n>N} |a_n|^2 \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Essendo limite di operatori di rango finito, otteniamo che T è compatto.