Compitino di Analisi Matematica 1

21 febbraio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dimostrino le affermazioni seguenti:

a) se f è continua allora manda compatti in compatti;
b) se f è iniettiva e manda compatti in compatti allora è continua;
c) si mostri con un esempio che esistono funzioni discontinue che mandano compatti in compatti.

Esercizio 2. Determinare analiticamente, in coordinate cartesiane, e disegnare il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ del piano complesso che verificano l'equazione

$$|z+i| + |z-i| = 8.$$

Esercizio 3. Al variare del parametro $\alpha > 0$, discutere il comportamento (convergenza semplice, convergenza assoluta, divergenza, indeterminatezza) delle seguenti serie:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n^{1/n} - 1\right)^{\alpha},$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!)}{(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}}.$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Si mostri che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{f(x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è di classe C^1. Si dica, giustificando la risposta, se la funzione g è anche di classe C^2.

Soluzioni

Soluzione Esercizio 1.

a) Sia C un compatto, sia y_n una successione in $f(C)$ e sia $x_n \in C$ tale che $f(x_n) = y_n$. La successione x_n ammette una sottosuccessione x_{n_k} che converge a un punto $x \in C$. Per la continuità di f, la sottosuccessione y_{n_k} converge a $y = f(x) \in f(C)$, quindi $f(C)$ è compatto.

b) Sia x_n una successione convergente a x e sia $y_n = f(x_n)$. Senza perdere in generalità possiamo supporre $x_n \neq x_m$ per ogni $n \neq m$ e quindi, essendo f iniettiva, $y_n \neq y_m$ per ogni $n \neq m$. Sia C il compatto definito da $C = \cup_n \{x_n\} \cup \{x\}$. Dalle proprietà di f segue che anche l'insieme $f(C) = \cup_n \{y_n\} \cup \{f(x)\}$ è compatto. Se f non fosse continua, esisterebbe una sottosuccessione y_{n_k} convergente a un certo $y \in f(C)$ con $y \neq f(x)$, cioè $y = y_{\bar{n}}$ per un certo indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$. Se poniamo $C' = C \setminus \{x_{\bar{n}}\}$ abbiamo che C' e $f(C')$ sono ancora insiemi compatti. Abbiamo inoltre che $y_{n_k} \in f(C')$ per k sufficientemente grande, ma $\lim_k y_{n_k} = y_{\bar{n}} \notin f(C')$. Questo contraddice la compattezza di $f(C')$ e produce un assurdo.

c) Una qualunque funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{Im}(f) = \{0, 1\}$ manda compatti in compatti ma non è continua.

Soluzione Esercizio 2. Se scriviamo $z = a + bi$, dobbiamo mostrare l'uguaglianza

$$\sqrt{a^2 + (b+1)^2} + \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 8.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$a^2 + b^2 + 1 + \sqrt{(a^2 + (b+1)^2)(a^2 + (b-1)^2)} = 32.$$

Elevando nuovamente al quadrato otteniamo l'uguaglianza

$$(a^2 + (b+1)^2)(a^2 + (b-1)^2) = (31 - a^2 - b^2)^2,$$

che opportunamente semplificata diventa

$$\frac{a^2}{15} + \frac{b^2}{16} = 1.$$

Questa è l'equazione di un'ellisse con centro in 0, semiasse maggiore sulla retta immaginaria di lunghezza 4 e semiasse minore sulla retta reale di lunghezza $\sqrt{15}$.

Soluzione Esercizio 3.

a) Osserviamo che $\lim_n n^{1/n} = 1$ e $n^{1/n} \geq (n+1)^{1/(n+1)}$ per ogni $n \geq 3$. Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente per ogni $\alpha > 0$.

Per quanto riguarda la convergenza assoluta della serie, ricordando che $n^{1/n} - 1 \sim \log(n)/n$, abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^\alpha \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^\alpha$$

che converge se e solo se $\alpha > 1$.

b) Si tratta di una serie a termini positivi, quindi la convergenza semplice coincide con quella assoluta. Osserviamo che $(n+1)^\alpha - n^\alpha \sim \alpha\, n^{\alpha-1}$, inoltre dalla formula di Stirling segue che $\log(n!) \sim n\log(n)$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!)}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^{\alpha-2}}\,,$$

che converge se e solo se $\alpha > 3$.

Soluzione Esercizio 4.

Osserviamo prima di tutto che g è continua, con $g(0) = 0$. Inoltre g è di classe C^2 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per vedere che g è anche di classe C^1 è sufficiente mostrare che esiste il limite $\lim_{x\to 0} g'(x)$.

Osserviamo che f ha un minimo assoluto in $x = 0$ e quindi $f'(0) = 0$ e $f''(0) \geq 0$. Supponiamo che $f''(0) > 0$ e quindi, essendo f di classe C^2, $f''(x) > 0$ in un intorno di $x = 0$. Di conseguenza, $f'(x) > 0$ in un intorno destro di zero, $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro di zero e, di conseguenza, $g'(x) = f'(x)/(2\sqrt{f(x)}) > 0$ in un intorno di zero. Applicando il teorema dell'Hôpital, otteniamo quindi

$$\lim_{x\to 0} g'(x)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)^2}{4f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2},$$

da cui segue che g è di classe C^1 con $g'(0) = \sqrt{f''(0)/2}$.

Consideriamo ora il caso $f''(0) = 0$. Vogliamo mostrare che $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0$ (l'uguaglianza $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0$ si ottiene in maniera completamente analoga). Se $f'(x) > 0$ in un intorno destro di zero possiamo concludere come sopra, applicando il teorema dell'Hôpital. Altrimenti, esiste una successione $x_n \to 0^+$ tale che $f'(x_n) = 0$. Senza perdere in generalità possiamo inoltre supporre che $f''(x_n) \geq 0$ per ogni n.

Definiamo ora la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(|x|) & \text{se } |x| \in [0, x_n], \\ f(x_n) + \dfrac{f''(x_n)}{2}\,(|x| - x_n)^2 & \text{se } |x| > x_n. \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione f_n è pari, positiva e vale la stima $|f_n''(x)| \leq \max_{s\in[0,x_n]} |f''(s)|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dalla formula di Taylor per la funzione f con centro in $x > 0$ otteniamo che

$$0 \leq f_n(x+h) = f_n(x) + h f_n'(x) + \frac{h^2}{2} f_n''(\xi_h) \leq f_n(x) + h f_n'(x) + \frac{h^2}{2} \max_{s\in[0,x_n]} |f''(s)|,$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$. Dato che il membro destro è un polinomio in h di secondo grado sempre positivo, il discriminante deve essere negativo, cioè

$$f_n'(x)^2 \leq 2 f_n(x) \max_{s\in[0,x_n]} |f''(s)|,$$

per ogni $x > 0$, da cui ricaviamo

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)^2}{4f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_n'(x)^2}{4f_n(x)} \leq \frac{1}{2} \max_{s\in[0,x_n]} |f''(s)|.$$

Osservando che $\lim_n \max_{s\in[0,x_n]} |f''(s)| = 0$ otteniamo finalmente che $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0$.

Se consideriamo la funzione $f(x) = x^4$ abbiamo che $g(x)$ è di classe C^1 ma non C^2.