Compito di Analisi Matematica 1

7 giugno 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha \in (0, +\infty)$, si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - \frac{1}{n^\alpha + 1} \right) .$$

Esercizio 2. Siano $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni continue tali che

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - g(x)| = 0.$$

Mostrare che allora f è uniformemente continua in $[a, +\infty)$ se e solo se anche g lo è.

Esercizio 3. Poniamo

$$I_n = \int_0^{2\pi} n\, e^x \,\cos(nx)\, dx, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Calcolare il valore di I_2.

b) Mostrare che $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Esercizio 4. Si consideri il sistema di successioni per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases}$$

con condizioni iniziali $a_0 = b_0 > 0$.

a) Determinare la ricorrenza soddisfatta dalla successione $c_n = a_n/b_n$.

b) Studiare il comportamento di c_n per $n \to +\infty$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Ricordando che

$$\sin(x) = x + O(x^3), \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+x} = x - x^2 + O(x^3), \qquad \text{per } x \to 0,$$

otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - \frac{1}{n^\alpha + 1} \right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha - 2}}\,,$$

che converge se e solo se $\alpha > 3/2$.

Esercizio 2. Osserviamo che è sufficiente mostrare che f è uniformemente continua, se anche g lo è. Supponiamo quindi che g sia uniformemente continua.

Dato $\varepsilon > 0$, esiste $M = M(\varepsilon) > a$ tale che $|f(x) - g(x)| \le \varepsilon/3$ per ogni $x > M$. Inoltre, per l'assoluta continuità di g, esiste $\delta > 0$ tale che $|g(x) - g(y)| \le \varepsilon/3$ se $|x - y| \le \delta$.

Per la continuità di f in $[a, M + \delta]$, esiste $0 < \delta' \le \delta$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \qquad \text{se } |x - y| \le \delta' \text{ e } x, y \in [a, M + \delta]\,.$$

Se invece $|x - y| \le \delta'$ e $x > M + \delta$ o $y > M + \delta$, si ha necessariamente $x, y \in [M, +\infty)$. Quindi, per la disuguaglianza triangolare, anche in questo caso otteniamo che

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |f(y) - g(y)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Esercizio 3.

a) Integrando per parti, otteniamo

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} e^x\, 2\cos(2x)\, dx = -\int_0^{2\pi} e^x \sin(2x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} e^x \cos(2x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^x \cos(2x)\, dx \\ &= \frac{e^{2\pi} - 1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} e^x\, 2\cos(2x)\, dx\,, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I_2 = \frac{4}{5}\,\frac{e^{2\pi} - 1}{2} = \frac{2}{5}\,(e^{2\pi} - 1).$$

b) Integrando per parti come sopra, otteniamo

$$I_n = \int_0^{2\pi} e^x\, n\cos(nx)\, dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{n} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} e^x\, n\cos(nx)\, dx\,,$$

da cui segue che

$$I_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}\,\frac{e^{2\pi} - 1}{n}$$

e quindi $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Esercizio 4.

a) Dividendo le due equazioni del sistema si ottiene

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2a_n + b_n} = 1 - \frac{a_n}{2a_n + b_n} = 1 - \frac{1}{2 + \dfrac{1}{c_n}} = \frac{c_n + 1}{2c_n + 1}\,, \tag{0.1}$$

con condizione iniziale $c_0 = a_0/b_0 = 1$.

b) Notiamo che la funzione $f(x) = (x+1)/(2x+1)$ è positiva, strettamente decrescente e convessa su $[0, +\infty)$, con $f(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1/2$.

Risolvendo l'equazione $f(x) = (x + 1)/(2x + 1) = x$, si ottengono i punti fissi della ricorrenza, che sono $x_\pm = \pm 1/\sqrt{2}$. In particolare $x_+ = 1/\sqrt{2}$ è l'unico punto fisso in $[0, +\infty)$.

Infine, dato che $f'(x) = -1/(2x + 1)^2$ e quindi $f'(x) \in (-1, 0)$ per ogni $x > 0$, otteniamo che f è una contrazione su $[1, +\infty)$ e quindi c_n converge all'unico punto fisso $x_+ = 1/\sqrt{2}$, per $n \to +\infty$.