Compito di Analisi Matematica 1

2 luglio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare dei parametri a, $b \in \mathbb{R}$, si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\left(\log(n) - a\right) - \log\left((n!)^b\right)}{n^a \sqrt{n+1}}.$$

Esercizio 2. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri una funzione continua $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Dimostrare che, se f è derivabile in $(a, +\infty)$, allora esiste $x_0 > a$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Esercizio 3. Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione integrale

$$F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{|t|^a \log(t+1)}{\arctan(t^{\frac{1}{3}})} \mathrm{d}t$$

è definita per ogni $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$.

Esercizio 4. Al variare del parametro $a \in (1, +\infty)$ si trovino tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + y(x) & = 0 \\ y(1) & = 0 \\ y(a) & = 1 \end{cases}$$

(si suggerisce il cambio di variabile $x = e^t$).

Soluzione esercizio 1. Dalla Formula di Stirling sappiamo che

$$\log(n!) = n\log(n) - n + O(\log(n)),$$

da cui otteniamo

$$\frac{n\left(\log(n)-a\right)-\log\left((n!)^b\right)}{n^a\sqrt{n+1}} = \frac{(1-b)n\log(n)+(b-a)n+o(n)}{n^{a+1/2}+o(n^{a+1/2})}.$$

Se $b \neq 1$, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\left(\log(n)-a\right)-\log\left((n!)^b\right)}{n^a\sqrt{n+1}} \sim (1-b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(n)}{n^{a-1/2}},$$

che converge se e solo se $a > 3/2$.

Se invece $b = 1$ e $a \neq 1$, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\left(\log(n)-a\right)-\log\left((n!)^b\right)}{n^a\sqrt{n+1}} \sim (1-a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a-1/2}}$$

che converge di nuovo se e solo se $a > 3/2$.

Infine, se $a = b = 1$, allora Se invece $b = 1$ e $a \neq 1$, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\left(\log(n)-a\right)-\log\left((n!)^b\right)}{n^a\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{O(\log(n))}{n^{3/2}}$$

che converge.

In conclusione la serie converge per $a > 3/2$, indipendentemente dal valore di b, e per $a = b = 1$.

Soluzione esercizio 2.

Se $f(x) = f(a)$ per ogni $x > a$, allora $f'(x) = 0$ per ogni $x > a$. Altrimenti, esiste $x_1 > a$ tale che $f(x_1) \neq f(a)$. Senza perdere in generalità possiamo supporre che $f(x_1) > f(a)$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, esiste $x_2 > x_1$ tale che $|f(x) - f(a)| \leq (f(x_1) - f(a))/2$ per ogni $x \geq x_2$. Sia ora x_0 un punto di massimo per f nell'intervallo $[a, x_2]$. Si ha necessariamente $f(x_0) \geq f(x_1)$ e quindi x_0 appartiene all'intervallo aperto (a, x_2). Di conseguenza, dal Teorema di Fermat otteniamo che $f'(x_0) = 0$.

Soluzione esercizio 3. La funzione $F(x)$ è sempre definita per $x < 0$, mentre per $x \geq 0$ bisogna verificare la convergenza dell'integrale. In $x = 0$ la funzione integranda ha il seguente sviluppo:

$$\frac{|t|^a\log(t+1)}{\arctan(t^{\frac{1}{3}})} \sim |t|^a t^{\frac{2}{3}},$$

quindi l'integrale converge se e solo se $a + 2/3 > -1$, cioè $a > -5/3$.

Soluzione esercizio 4. Cerchiamo prima tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $x^2y'' + y = 0$, con $x > 0$. Mediante la sostituzione $z(t) = y(e^t)$, l'equazione diventa

$$z''(t) - z'(t) + z(t) = 0,$$

che ha la soluzione generale

$$z(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right)\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

da cui ricaviamo, per $x > 0$,

$$y(x) = \sqrt{x} \left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, \log(x)\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, \log(x)\right)\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo le condizioni al bordo $y(1) = 0$ e $y(a) = 1$, otteniamo

$$c_2 = 0, \qquad c_1\sqrt{a}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, \log(a)\right) = 1.$$

Se $\frac{\sqrt{3}}{2}\log(a) = k\pi$, cioè $a = e^{\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}}$, con $k \in \mathbb{Z}$, allora l'equazione non ha soluzioni. Viceversa, se $a \neq e^{\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}}$, il problema ha un'unica soluzione data da

$$y(x) = \frac{\sqrt{x}\, \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, \log(x)\right)}{\sqrt{a}\, \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, \log(a)\right)}.$$