Compito di Analisi Matematica 1

17 settembre 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare del parametro $\theta \in \mathbb{R}$, si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\,\theta) + \sin(\theta/n)}{[\log(n)]^2}.$$

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Mostrare che esistono due punti distinti x_1, $x_2 \in (0, 1)$ tali che $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) > 0$ e

$$f'(x_1) + f'(x_2) = 2.$$

Esercizio 3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) - y(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} .$$

Mostrare che esiste una sola soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Determinare esplicitamente la successione definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} & = 2\, a_n + a_{n-1} \\ a_0 & = 0 \\ a_1 & = 1. \end{cases}$$

Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la relazione $a_{n+1}\, a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

Dato che la serie $\sum \frac{\sin(\theta/n)}{[\log(n)]^2} \sim \sum \frac{\theta}{n[\log(n)]^2}$ è sempre convergente, è sufficiente studiare la convergenza della serie $\sum \frac{\cos(n\theta)}{[\log(n)]^2}$. Per poter applicare il criterio di Dirichlet, dobbiamo verificare che esiste $M = M(\theta) > 0$ tale che

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta)\right| \leq M \qquad \text{per ogni } N \geq 2.$$

Se θ non è un multiplo intero di 2π, abbiamo

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta)\right| = \left|Re\left(\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right)\right| = \left|Re\left(\frac{e^{i(N+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right)\right| \leq \frac{2}{Re\left(e^{i\theta}-1\right)}.$$

Pertanto, se θ non è un multiplo di 2π, la serie converge per il criterio di Dirichlet.

Viceversa, se θ è un multiplo di 2π, abbiamo che $cos(n\theta) = 1$ per ogni n e quindi la serie diverge a $+\infty$.

Soluzione esercizio 2.

Poiché la funzione derivata manda connessi in connessi grazie al Teorema di Darboux, sappiamo che l'insieme $I = f'((0,1))$ è connesso, inoltre $1 \in I$ per il Teorema di Lagrange.

Sia $x_0 \in (0,1)$ tale che $f'(x_0) = 1$. Se $f(x_0) = x_0$ allora, sempre per il Teorema di Lagrange, esistono $x_1 \in (0, x_0)$ e $x_2 \in (x_0, 1)$ tali che $f'(x_1) = f'(x_2) = 1$, e questo ci permette di concludere.

Supponiamo ora che $f(x_0) > x_0$. In questo caso, grazie al Teorema di Lagrange esistono $x_1 \in (0, x_0)$ e $x_2 \in (x_0, 1)$ tali che $f'(x_1) > 1 > f'(x_2)$. Pertanto, ponendo $\delta = \min(f'(x_1) - 1, 1 - f'(x_2), 1) \in (0, 1]$, l'insieme connesso I contiene l'intervallo aperto $(1 - \delta, 1 + \delta)$. Per concludere è sufficiente scegliere x_1 tale che $f'(x_1) = 1 + \delta/2$ e x_2 tale che $f'(x_2) = 1 - \delta/2 > 0$.

Nel caso $f(x_0) < x_0$ si procede in maniera del tutto analoga.

Soluzione esercizio 3.

Cerchiamo prima le soluzioni dell'equazione omogenea associata $y'' - y = 0$. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ ha soluzioni $\lambda = \pm 1$, pertanto la soluzione generale dell'omogenea è data da $y_{\mathrm{om}}(x) = ae^x + be^{-x}$, al variare di a, $b \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare del tipo $y_{\mathrm{p}}(x) = a(x)e^x + b(x)e^{-x}$. Attraverso il metodo della variazione delle costanti otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a'(x)e^x + b'(x)e^{-x} = 0 \\ a'(x)e^x - b'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}\,, \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$a'(x) = \frac{e^{-x}}{2(e^x + e^{-x})}, \qquad b'(x) = \frac{e^x}{2(e^x + e^{-x})}$$

e quindi, a meno di costanti additive,

$$a(x) = -\frac{1}{4}\log(1 + e^{-2x}), \qquad b(x) = -\frac{1}{4}\log(1 + e^{2x}).$$

Da questo otteniamo che la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = \left(a - \frac{1}{4}\log(1 + e^{-2x})\right)e^x + \left(b - \frac{1}{4}\log(1 + e^{2x})\right)e^{-x}, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo ora che, se $a = b = 0$, la funzione $y(x)$ tende a 0 per $|x| \to +\infty$ ed è pertanto anche limitata. Viceversa, se $a \neq 0$ (risp. se $b \neq 0$), abbiamo che $\lim_{x\to+\infty} |y(x)| = +\infty$ (risp. $\lim_{x\to-\infty} |y(x)| = +\infty$), quindi in questi casi la funzione $y(x)$ non è limitata.

Soluzione esercizio 4. Il polinomio caratteristico associato all'equazione è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$ ed ha soluzioni $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$. Pertanto la soluzione generale della ricorrenza è

$$a_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n \qquad A,\, B \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo i dati iniziali ricaviamo $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e $B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, e quindi

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(1 + \sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(1 - \sqrt{2})^n.$$

Sostituendo l'espressione esplicita di a_n nella formula $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ otteniamo

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 &= \frac{1}{8}\left((1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}\right)\left((1 + \sqrt{2})^{n-1} - (1 - \sqrt{2})^{n-1}\right) \\ &\quad -\frac{1}{8}\left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n\right)^2 \\ &= -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{2})^{n+1}(1 - \sqrt{2})^{n-1} - \frac{1}{8}(1 - \sqrt{2})^{n+1}(1 + \sqrt{2})^{n-1} \\ &\quad +\frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})^n(1 - \sqrt{2})^n \\ &= -\frac{1}{8}\,\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\,(-1)^n - \frac{1}{8}\,\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\,(-1)^n + \frac{1}{4}\,(-1)^n \\ &= \frac{6}{8}\,(-1)^n + \frac{1}{4}\,(-1)^n = (-1)^n\,. \end{aligned}$$