Soluzioni compito 12.09.19

Esercizio 1

a) Osserviamo anzitutto che

$$f(x,y) = y - \log_x (1+x^y) \leq y - \log_x x^y = y - y = 0 \quad \forall (x,y) \in A$$

Possiamo inoltre scrivere

$$f(x,y) = \log_x (x^y) - \log_x (1+x^{-y}) = - \log_x (1+x^{-y}) =$$

$$= - \frac{\log (1+x^{-y})}{\log x}$$

Si ha poi

$$\lim_{x \to 1^+} \log (1+x^{-2}) = \log 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} \log (1+x^{-2}) = \log 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} \log x = 0^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

da cui

$$\lim_{x \to 1^+} f(x,2) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x,2) = 0$$

Dunque

$$\inf_A f = -\infty \qquad \sup_A f = 0$$

b) Nel punto a) abbiamo visto che $\lim_{x \to +\infty} f(x,2) = 0$.

D'altra parte

$$\lim_{y \to -\infty} (1+2^{-y}) = +\infty$$

e pertanto

$$\lim_{y \to -\infty} f(2,y) = - \lim_{y \to -\infty} \frac{\log (1+2^{-y})}{\log 2} = -\infty$$

Pertanto quando $(x,y) \in A$, $(x,y) \to \infty$ lungo due direzioni diverse, anche i limiti di $f(x,y)$

sono distinti. Se ne deduce che

$$\nexists \text{ il } \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y).$$

c) Dal punto a) segue immediatamente che la funzione f è di classe C^1 nell'insieme aperto A. Le sue derivate parziali sono

$$D_1 f(x,y) = \left(\frac{y\, x^{-y-1} \log x}{(1+x^{-y})} + \frac{\log(1+x^{-y})}{x} \right) (\log x)^{-2} =$$

$$= \frac{y}{x(x^y+1)\log x} + \frac{\log(1+x^{-y})}{x \log^2 x}$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{x^{-y}}{1+x^{-y}} = \frac{1}{x^y+1}$$

È immediato osservare che

$$D_2 f(x,y) \neq 0 \qquad \forall (x,y) \in A.$$

Quindi nessun punto di A è stazionario per f e di conseguenza nessun punto dell'aperto A è di massimo o di minimo locale.

d) Poiché il quadrato Q è chiuso e limitato, cioè compatto, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su Q. Per il punto c) massimo e minimo vengono assunti sul bordo di Q che andiamo quindi a parametrizzare

$$L_1 = \{(x,y) \in A \,\|\, 2 \le x \le 3,\ y = 0\}$$
$$L_2 = \{(x,y) \in A \,\|\, x = 2,\ -1 \le y \le 0\}$$
$$L_3 = \{(x,y) \in A \,\|\, 2 \le x \le 3,\ y = -1\}$$

$L_4 = \{(x,y)\in A \mid x=3,\ -1\le y\le 0\}$

Si ha $f_{L_1}(t) = -\log_t 2 = -\dfrac{\log 2}{\log t}$; $f'_{L_1}(t) = \dfrac{\log 2}{t\log^2 t} > 0$

quando $t\in[2,3]$

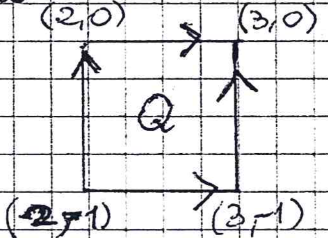
$f_{L_2}(t) = t - \dfrac{\log(1+2^t)}{\log 2}$, $f'_{L_2}(t) = \dfrac{1}{1+2^t} > 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$f_{L_3}(t) = -1 - \dfrac{\log(1+t^{-1})}{\log t} = -\dfrac{\log(1+t)}{\log t}$;

$$f'_{L_3}(t) = \frac{(t+1)\log(t+1) - t\log t}{\log^2 t} > 0 \quad \text{per } t\in[2,3]$$

$f_{L_4}(t) = t - \dfrac{\log(1+3^t)}{\log 3}$, $f'_{L_3}(t) = \dfrac{1}{1+3^t} > 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

Dunque $f_{L_1}, f_{L_2}, f_{L_3}, f_{L_4}$ sono crescenti e si ha il diagramma



in cui le frecce indicano il verso della crescita. Se ne deduce che

$$\min_Q f = f(2,-1) = -\frac{\log 3}{\log 2} \quad \text{e} \quad \max_Q f = f(3,0) = -\frac{\log 2}{\log 3}.$$

Esercizio 2

a) La superficie di equazione cartesiana

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

è un cono che ha per asse l'asse zeta e la superficie di equazione cartesiana

$$z = x^2+y^2$$

è un paraboloide circolare con il medesimo asse. Pertanto Ω è il solido delimitato dalle due superfici quando $0 \le z \le 1$. Il volume di Ω è dato allora dalla differenza dei volumi dei 2 solidi

$$\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1, \ z \ge x^2+y^2\} \quad e$$

$$\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1, \ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$$

Usando la formula di riduzione per strati degli integrali tripli si ha

$$vol(\Omega_1) = \iiint_{\Omega_1} dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \le z} dy\,dz = \pi \int_0^1 z\,dz =$$

$$= \pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \pi/2$$

$$vol(\Omega_2) = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \le \sqrt{z}} dx\,dy = \pi \int_0^1 z^2\,dz =$$

$$= \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \pi/3$$

da cui $\quad vol(\Omega) = vol(\Omega_1) - vol(\Omega_2) = \pi/6$

b) Dal punto 1 segue che Ω può essere così descritto

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1, \ z \le x^2+y^2 \le \sqrt{z}\} = \Omega_1 \setminus \Omega_2$$

Usando ancora la formula di riduzione per strati e le coordinate cilindriche, si ha dunque

$$\iiint_{\Omega} \frac{z}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 u\,du \int_u^{\sqrt{u}} \frac{\rho}{1+\rho}\,d\rho \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = u \end{cases}$$

Ma, invertendo l'ordine di integrazione, cioè sfruttando la semplicità sia rispetto ad u che a ρ dell'insieme $A = \{(u,\rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le u \le 1,\ u \le \rho \le \sqrt{u}\}$, si ha poi

$$\int_0^1 u\,du \int_u^{\sqrt{u}} \frac{\rho}{1+\rho}\,d\rho = \iint_A \frac{u\rho}{1+\rho}\,du\,d\rho =$$

$$= \int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho}\,d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} u\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\rho^3 - \rho^5}{1+\rho}\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho^3(1-\rho)\,d\rho =$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{8} - \frac{\rho^5}{10}\right]_0^1 = 1/40$$

da cui segue

$$\iiint_\Omega \frac{z}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{40}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi/20$$

Esercizio 3

a) Applichiamo le formule di Gauss-Green al calcolo dell'area di una regione delimitata da una curva regolare a tratti. La regione A è delimitata dal sostegno γ della curva $\underline{r}$ e dal segmento di asse delle x di estremi $\underline{r}(\pi/4) = (\pi/2, 0)$ e $\underline{r}(5\pi/4) = (5\pi/2, 0)$ da parametrizzare nel modo seguente

$$\underline{s} : [\pi/2, 5\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \underline{s}(t) = (3\pi - t, 0)$$

di sostegno γ_1 e tale quindi che

$$\gamma \cup \gamma_1 = \partial^+ A$$

percorso cioè in senso antiorario. Pertanto

$$\iint_A dx\,dy = \int_\gamma \underline{F}\,d\underline{z} + \int_{\gamma_1} \underline{F}\,d\underline{s} \quad \text{dove } \underline{F}(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \langle \underline{F}(\underline{z}(t)), \underline{z}'(t)\rangle\,dt + \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \langle \underline{F}(\underline{s}(t)), \underline{s}'(t)\rangle\,dt = J_1 + J_2$$

Si ha immediatamente che

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \langle (0, 3\pi - t), (-1, 0)\rangle\,dt = 0$$

mentre invece

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \langle (\sin t - \cos t, 2t), (2 - (\sin t + \cos t))\rangle\,dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin t - \cos t - t(\sin t + \cos t))\,dt = \left[-(\sin t + \cos t)\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} +$$

$$+ \left[t(\cos t - \sin t)\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} - \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\cos t - \sin t)\,dt = 4/\sqrt{2} +$$

$$- \left[\sin t + \cos t\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 4/\sqrt{2} + 4/\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Dunque

$$\iint_A dx\,dy = 4\sqrt{2}$$

b) Osserviamo che il campo $\underline{G}(x,y) = (-xy, -2xy)$ definito in $\mathbb{R}^2$ è tale che il suo rotore

$$\operatorname{rot} \underline{G}(x,y) = \left(0, 0, \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y)\right) =$$

$$= (0, 0, -2y + x)$$

Quindi, ancora usando le formule di Gauss-Green applicate questa volta a $\underline{G}$ in A, si ottiene

$$\iint_A (x - 2y)\,dx\,dy = \int_\gamma \underline{G}\,d\underline{z} + \int_{\gamma_1} \underline{G}\,d\underline{s} = J_1 + J_2.$$

Ma, come nel punto a)

$J_2 = 0$ mentre, sempre come nel punto a)

$$J_1 = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} < \left(2t(\sin t - \cos t), 4t(\sin t - \cos t)\right), \left(2, -(\sin t + \cos t)\right) > dt =$$

$$= 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} t(\sin t - \cos t)\, dt + 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} t(\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt =$$

$$= -\left[4t(\sin t + \cos t)\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} + 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin t + \cos t)\, dt + 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} t\cos(2t)\, dt =$$

$$= 6\pi\sqrt{2} + 4\left[\operatorname{sen} t - \cos t\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} + 2\left[t\sin(2t)\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} - 2\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin(2t)\, dt =$$

$$= 6\pi\sqrt{2} + 2\pi - \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin t\, dt = 6\pi\sqrt{2} + 2\pi$$

Quindi

$$\iint_A (x - 2y)\, dx\, dy = 6\pi\sqrt{2} + 2\pi$$

c) Per il punto b) si osserva che

$$\underline{F}(x,y) = -G(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Pertanto, dal punto b) ricaviamo subito

$$\int_\gamma \underline{F}\, dr = -\int_\gamma \underline{G}\, dr = -J_1 = -6\pi\sqrt{2} - 2\pi$$

$\square$