Soluzioni prova in itinere 20.12.19

Esercizio 1

a) Per le proprietà delle serie geometriche, la serie data

converge se $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$

diverge se $\frac{x-1}{x+1} \geq 1$

è indeterminata se $\frac{x-1}{x+1} \leq -1$.

D'altra parte

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1 \iff -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} - 1 < 0 \\ \frac{x-1}{x+1} + 1 > 0 \end{cases} \iff \frac{-2}{x+1} < 0 < \frac{2x}{x+1} \iff x > 0 .$$

Si ha poi

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 1 \iff \frac{-2}{x+1} \geq 0 \iff x < -1$$

e

$$\frac{x-1}{x+1} \leq -1 \iff \frac{2x}{x+1} \leq 0 \iff -1 < x \leq 0 .$$

Pertanto la serie data, che è definita per $x \neq -1$, converge per $x > 0$, diverge per $x < -1$ ed è indeterminata per $-1 < x \leq 0$. In particolare, se $x = 0$ la sua oscillazione è limitata.

b) Valgono le identità

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y} , \quad \sum_{k=1}^{\infty} y^k = \frac{y}{1-y} \quad (|y| < 1).$$

Ne segue che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k = \frac{x-1}{x+1}\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1} = \frac{x-1}{2}$$

per $x \in A = (0,+\infty)$

c) Come è noto

$$-\log(1-y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}y^k \qquad (-1 \leq y < 1).$$

Dunque, se $x > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k = -\log\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right) = \log(x+1) - \log 2$$

Si osservi infine che questa serie converge anche per $x=0$ in virtù del criterio di Leibnitz

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\log 2$$

Esercizio 2.

a) La funzione f_α è continua e positiva nell'insieme $(0,+\infty)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)\cdot x^\alpha = 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

da cui segue

$$\frac{1}{2x^\alpha} \leq f_\alpha(x) \leq \frac{2}{x^\alpha} \qquad \text{per } x \geq x_0 \geq 1.$$

Se ne deduce che

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{1+x^2}\,dx \begin{cases} \leq 2\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^2)} < 2\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha+2}} < +\infty & \text{se } \alpha > -1 \\ \geq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^2)} > \frac{1}{4}\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha+2}} = +\infty & \text{se } \alpha \leq -1 . \end{cases}$$

Dunque

$$\int_1^{+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{1+x^2}\,dx = \int_1^{x_0} \frac{f_\alpha(x)}{1+x^2}\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{1+x^2}\,dx \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > -1 \\ = +\infty & \text{se } \alpha \leq -1 \end{cases}$$

b) Poiché f_α è limitata superiormente nell'intervallo $(0,1]$, per il punto a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{f_1(x)}{1+x^2}\,dx < +\infty$$

Calcoliamo l'integrale. Posto $f_1(\alpha) = t$, si ha

$$D f_1(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

da cui, per sostituzione

$$\int_y^1 \frac{f_1(x)}{1+x^2}\,dx = -\int_{f_1(y)}^{f_1(1)} dt = f_1(y) - f_1(1) \qquad (0<y<1)$$

$$\int_1^y \frac{f_1(x)}{1+x^2}\,dx = f_1(1) - f_1(y) \qquad (y>1)$$

Pertanto

$$\int_0^1 \frac{f_1(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{y\to 0^+} f_1(y) - f_1(1) = \lim_{y\to 0^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{y} - \pi/4 = \pi/4$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{f_1(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\left(f_1(1) - f_1(y)\right) = \pi/4$$

cioè

$$\int_0^{+\infty} \frac{f_1(x)}{1+x^2}\,dx = \pi/2 .$$

Esercizio 3

a) Ponendo $u'' = v$, l'equazione differenziale data si trasforma nel sistema

$$(*) \quad \begin{cases} t v' = v + t^2 \\ u'' = v \end{cases}$$

La prima delle due equazioni è lineare del primo ordine, non in forma normale. Dividendo per $t > 0$ otteniamo

$$v'(t) = \frac{1}{t} v(t) + t = a(t)\, v(t) + b(t)$$

che si integra in modo canonico:

$$A(t) = \int_1^t a(s)\, ds = \int_1^t \frac{ds}{s} = \log t$$

$$v(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)}\, b(t)\, dt = t \int dt = t^2 + c\,t$$

($c \in \mathbb{R}$, costante arbitraria). Sostituendo in $(*)$, si ottiene allora

$$u'' = t^2 + ct \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{3} t^3 + \frac{c}{2} t^2 + c_2 \quad \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{12} t^4 + \frac{c}{6} t^3 + c_2 t + c_3 .$$

Le soluzioni dell'equazione (del terzo ordine) data sono pertanto, se $t > 0$

$$u(t) = \frac{1}{12} t^4 + c_1 t^3 + c_2 t + c_3 \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

b) Dal punto a) segue immediatamente

$$\lim_{t \to 0^+} u(t) = c_3 \qquad \int_0^1 u(t)\, dt = \frac{1}{60} + \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{2} + c_3$$

Otteniamo dunque il sistema lineare di due equazioni nelle incognite c_1, c_2, c_3

$$\begin{cases} c_3 = 1 \\ c_1/4 + c_2/2 + c_3 = -1/60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_2 = -c_1/2 - 61/30 \end{cases}.$$

Le soluzioni u che soddisfano alle condizioni date sono quindi le seguenti

$$u(t) = \frac{1}{12}t^4 + c_1 t^3 - \left(\frac{c_1}{2} + \frac{61}{30}\right)t + 1$$

c) Derivando le soluzioni trovate nel punto a), si ottiene

$$u'(t) = \frac{t^3}{3} + 3c_1 t^2 + c_2 \quad , \quad u''(t) = t^2 + 6c_1 t$$

da cui

$$u'(1) = \frac{1}{3} + 3c_1 + c_2 \quad , \quad u''(1) = 1 + 6c_1$$

mentre

$$u(1) = \frac{1}{12} + c_1 + c_2 + c_3$$

Le condizioni su $u(1)$, $u'(1)$, $u''(1)$ generano allora il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{1}{12} + c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ \frac{1}{3} + 3c_1 + c_2 = 0 \\ 1 + 6c_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 + c_3 = -\frac{1}{12} \\ c_2 = -1/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 1/4 \\ c_2 = -1/3 \end{cases}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è pertanto la funzione

$$u(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}$$

□