Corso di Analisi Matematica I

Anno Accademico 2019-2020

SECONDA PROVA SCRITTA IN ITINERE

Pisa, 20.12.19

Nome e cognome **Matricola**

1. Data la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$$

a) Studiarne il comportamento al variare di $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$.

b) Detto A l'insieme in cui essa converge, calcolarne la somma $\forall x \in A$.

c) Mostrare che la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$$
converge quando $x \in A$ e calcolarne la somma.

2. Sia $f_\alpha : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$$f_\alpha(x) = \big(\arctan(1/x)\big)^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \ .$$

a) Dire, motivando la risposta, per quali valori di α converge l'integrale
$$\int_1^{+\infty}\frac{f_\alpha(x)}{1+x^2}\,dx \ .$$

b) Mostrare che l'integrale
$$\int_0^{+\infty}\frac{f_1(x)}{1+x^2}\,dx$$
converge e calcolarlo.

3. Data l'equazione differenziale
$$tu''' - u'' = t^2$$

a) Trovarne tutte le soluzioni u definite nella semiretta $(0,+\infty)$.

b) Trovarne tutte le soluzioni u che verificano le condizioni
$$\lim_{t\to 0^+} u(t) = 1 \qquad , \qquad \int_0^1 u(t)\,dt = 0 \ .$$

c) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} tu''' - u'' = t^2 \\ u(1) = 0 \\ u'(1) = 0 \\ u''(1) = 1 \ . \end{cases}$$