Soluzioni compito 24.06.19

Esercizio 1

a) Poiché $f(x,0)=(x^2+x)e^x$ e $f(0,y)=(y-y^2)e^y$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0)=+\infty \qquad \lim_{y\to+\infty} f(0,y)=-\infty.$$

Dunque

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty.$$

b) La funzione f è ovviamente di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$.
Calcoliamone le derivate parziali prime:

$$D_1 f(x,y) = (x^2+3x-y^2+y+1)e^{x+y}$$
$$D_2 f(x,y) = (x^2+x-y^2-y+1)e^{x+y}.$$

I punti stazionari di f, cioè quelli in cui si annulla il gradiente sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2+3x-y^2+y+1=0 \\ x^2+x-y^2-y+1=0 \end{cases}$$

o, equivalentemente del sistema

$$\begin{cases} x^2+3x-y^2+y = x^2+x-y^2-y \\ x^2+x-y^2-y+1=0 \end{cases}$$

da cui si ricava
$$\begin{cases} x=-y \\ 2x+1=0 \end{cases}$$

$(-1/2, 1/2)$ è pertanto l'unico punto stazionario per f.
Abbiamo poi

$$D_{11} f(x,y) = (x^2+5x-y^2+y+4)e^{x+y}$$
$$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = (x^2+3x-y^2-y+2)e^{x+y}$$
$$D_{22} f(x,y) = (x^2+x-y^2-3y)e^{x+y}.$$

La matrice hessiana nel punto $(-1/2, 1/2)$ è allora

$$H_f(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

i cui autovalori, 2 e -2, hanno segno opposto.
Pertanto $(-1/2, 1/2)$ è punto di sella.

c) Posto $F(x,y) = f(x) - 2e^2$
si ha immediatamente

$$F(1,1) = 0 \quad , \quad D_1 F(x,y) = D_1 f(x,y) \quad , \quad D_2 F(x,y) = D_2 f(x,y).$$

In particolare, per il punto b)

$$D_1 F(1,1) = 5e^2 \quad , \quad D_2 F(1,1) = e^2 \neq 0$$

Quindi, per il teorema del Dini, in un intorno del punto $(1,1)$ l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$$

è grafico di un'unica funzione $y = g(x)$ di classe C^1 tale che

$$F(x, g(x)) = 0$$

$$g'(1) = -\frac{D_1 F}{D_2 F}(1,1) = -5$$

L'equazione della retta tangente in $(1,1)$ è allora

$$y - g(1) = g'(1)(x-1)$$

cioè $$y = -5x + 6.$$

d) L'insieme T è il triangolo di vertici $(1,1), (0,0), (1,-1)$.
Per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo in T. D'altra parte, per il punto b), all'interno di T non vi è alcun punto stazionario per f.
Esaminiamo allora f sul bordo di T, costituito dai segmenti:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y = x\}$$

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y = -x\}$$

$$S_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=-1\,,\ -1\le y\le 1\}$$

Si ha

$$g_1(x) = f|_{S_1} = 2x e^{2x} \qquad x\in[0,1]$$

$$g_2(x) = f|_{S_2} = 0 \qquad x\in[0,1]$$

$$g_3(x) = f|_{S_3} = (2+y-y^2)e^{y+1} \qquad y\in[-1,1]$$

Ovviamente g_1 è crescente con massimo $g_1(1) = 2e^2$ e minimo $g_1(0)=0$. Inoltre

$g_3'(y) = (3-y-y^2)e^{1+y}$ che si annulla quando

$$y^2+y-3=0$$

cioè per $y=(-1\pm\sqrt{13})/2$, entrambi esterni all'intervallo $[-1,1]$ poiché

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2 < 1 = \frac{\sqrt{9}-1}{2} < \frac{\sqrt{13}-1}{2}\,,$$

mentre

$$g_3(-1)=0 \quad , \quad g_3(1) = 2e^2\,.$$

In definita, si ottiene

$$\max_T f = 2e^2 \qquad \min_T f = 0$$

Esercizio 2

a) Nel piano $y=0$ l'insieme D è simmetrico rispetto all'asse z ed è intersezione del cerchio $x^2+z^2+x\le 3/4$ con il semipiano $x\ge 0$.
Posto dunque $D^+ = D\cap\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 / z>0\}$ si ha

$$\iint_D \frac{|z|}{2x+1}\,dx\,dz = 2\iint_{D^+}\frac{z}{2x+1}\,dx\,dz\,.$$

Poiché poi la circonferenza $x^2+z^2+x=3/4$ interseca l'asse z nei punti $z=\pm\sqrt{3}/2$, D^+ è un insieme x-semplice. Più precisamente

$$D^+=\left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le z\le \sqrt{3}/2,\ 0\le x\le \sqrt{1-z^2}-1/2\right\}.$$

Pertanto

$$2\iint_{D^+}\frac{z}{2x+1}\,dx\,dz = 2\int_0^{\sqrt{3}/2} z\,dz\int_0^{\sqrt{1-z^2}-1/2}\frac{dx}{2x+1} =$$

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} z\left(\Big[\log(2x+1)\Big]_0^{\sqrt{1-z^2}-1/2}\right)dz =$$

$$=\log 2\int_0^{\sqrt{3}/2} z\,dz+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2} z\log(1-z^2)\,dz = \log 2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}/2}+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{1/4}^{1}\log t\,dt = \frac{3\log 2}{8}+\frac{1}{4}\Big[t\log t-t\Big]_{1/4}^{1} =$$

$$=\frac{3\log 2}{8}+\frac{\log 4-3}{16}=\frac{8\log 2-3}{16}.$$

b) Per il punto a) D può essere descritto come insieme x-semplice:

$$D=\left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |z|\le \sqrt{3}/2,\ 0\le x\le\sqrt{1-z^2}-1/2\right\}.$$

Quindi, ruotando D intorno all'asse z, si ottiene un solido la cui superficie laterale si parametrizza nel seguente modo

$$\begin{cases} x(u,\theta)=\left(\sqrt{1-u^2}-1/2\right)\cos\theta\\ y(u,\theta)=\left(\sqrt{1-u^2}-1/2\right)\sin\theta\\ z(u,\theta)=u\end{cases}\qquad (u,\theta)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\times[0,2\pi].$$

Il volume di S è dunque dato dalla formula

$$\mathrm{vol}(S)=\pi\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{1-u^2}-\frac{1}{2}\right)^2 du = \pi\left[\frac{3}{4}u-\frac{u^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} +$$

$$-\pi\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{1-u^2}\,du = \pi\sqrt{3} - \pi\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2 t\,dt = \pi\sqrt{3}+$$

$$-\pi\left[\frac{\cos t\sin t+t}{2}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \pi\sqrt{3}-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$$

Esercizio 3

a) Poiché $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, $\underline{F_a}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale. D'altra parte

$$\mathrm{rot}\,\underline{F_a}=\left(\frac{\partial(a(x-y)+z^2)}{\partial y}-\frac{\partial(ax-y^2)}{\partial z},\ \frac{\partial(x^2-ay)}{\partial z}+\right.$$

$$\left.-\frac{\partial(a(x-y)+z^2)}{\partial x},\ \frac{\partial(ax-y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2-ay)}{\partial y}\right)=$$

$$=(-a,-a,2a)=(0,0,0)\iff a=0.$$

$\underline{F_a}$ è dunque conservativo se e solo se $a=0$. Si ha poi

$$\underline{F_0}=(x^2,-y^2,z^2)$$

ed è immediato osservare che la funzione $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definita da

$$U(x,y,z)=\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}$$

è tale che

$$\nabla U=\underline{F_0}$$

cioè U è un potenziale di $\underline{F_0}$.

b) Il lavoro del campo conservativo $\underline{F_0}$ lungo la curva $\underline{r}$ è dato da

$$U(\underline{r}(1))-U(\underline{r}(-1))=$$

$$= U(1,1,1) - U(-1,1,-1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 4/3$$

c) Osserviamo che

$$\partial D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-1)^2}{4} + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \right\}$$

è un ellisse con assi $a = 2$, $b = 1$ ed area $\pi a b = 2\pi$.

Inoltre, per il punto a)

$$\operatorname{rot} \underline{F}_{\frac{1}{2}} = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

Usando il teorema del rotore, sappiamo poi che la circuitazione del campo $\underline{F}_{\frac{1}{2}}$ lungo il bordo di D, percorso nel verso positivo, è uguale al flusso del rotore di $\underline{F}_{\frac{1}{2}}$ attraverso D (con versore normale costante $\underline{n} = (0,0,1)$). Cioè

$$\int_{\partial^+ D} \underline{F}_{\frac{1}{2}}\, d\underline{r} = \int_D \langle \operatorname{rot} \underline{F}_{\frac{1}{2}}, \underline{n} \rangle \, dS =$$

$$= \int_D \left\langle \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right), (0,0,1) \right\rangle dS = \operatorname{area}(D) = 2\pi$$

$\square$