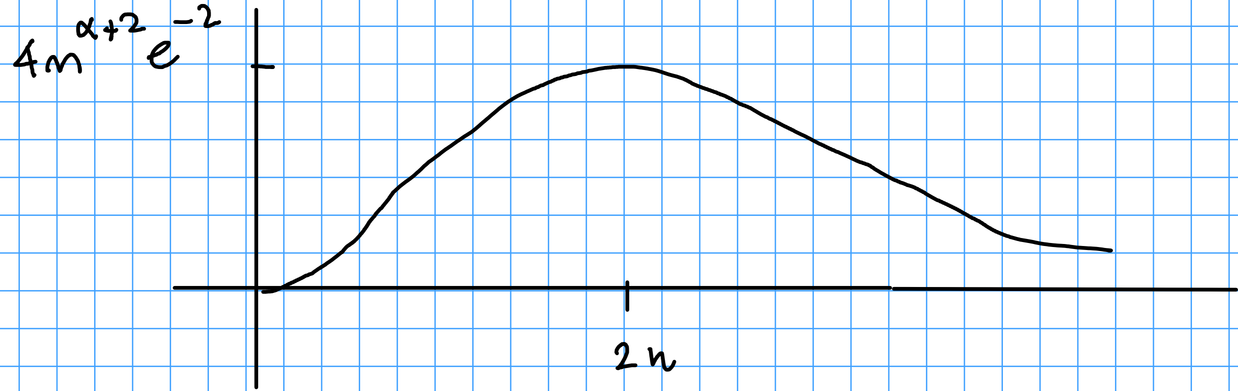
Q1

(1) $f_n(x) = n^\alpha x^2 e^{-\frac{x}{n}}$.

$f_n(0) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, $f_n'(x) = n^\alpha\left(2x - \frac{x^2}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} =$

$n^{\alpha-1}x(2n-x)e^{-\frac{x}{n}}$; $f_n'(x) = 0 \iff x = 0$ oppure $x = 2n$



$f_n(2n) = 4n^{\alpha+2}e^{-2}$

Quindi $\|f_n\|_\infty = 4n^{\alpha+2}e^{-2}$. D'altra parte, se x è fissato $f_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$; quindi $f_n \to 0$ puntualmente.

Per avere la convergenza uniforme dovrà allora essere $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$ e questo equivale a $4n^{\alpha+2}e^{-2} \to 0 \iff \alpha+2<0 \iff \boxed{\alpha<-2}$

(2) Vediamo ora la convergenza totale della serie $\sum f_n$.
Questa equivale alla convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+2}$, e cioè a

$\alpha+2<-1 \iff \boxed{\alpha<-3}$

(3) Dal punto (2) segue che la serie converge unif. per $\alpha < -3$

Mostriamo che se $\alpha \geq -3$ la serie non converge unif.

Se dimostriamo questo otterremo che la serie conv. unif. $\iff$ $\boxed{\alpha < -3}$

Ricordiamo che se $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, e se la serie converge unif. su $[0, +\infty[$ allora

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Verifichiamo allora che, per $\alpha \geq -3$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) > 0$.

Infatti, fissato un intero K

$$F(K) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} K^2 e^{-\frac{K}{n}} \geq \sum_{n=1}^{K} n^{\alpha} K^2 e^{-\frac{K}{n}} \geq \sum_{n=1}^{K} n^{\alpha+2} e^{-1} \overset{(\alpha \geq -3)}{\geq} \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n}$$

Se ne deduce che $\lim_{K \to +\infty} F(K) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, C.V.D

Q. 2
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2-4x+13)}\, dx = \mathrm{Im}\Bigg(\underbrace{\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x(x^2-4x+13)}\, dx}_{(*)} \Bigg)$$

Il denominatore ha la radice reale $x=0$ e le due radici $2 \pm 3i$

Tutte le radici sono semplici

Per la teoria nota, se $f(z) = \dfrac{e^{2zi}}{z(z^2-4z+13)}$,

$$(*) = \pi i \operatorname{Res}(f, 0) + 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2+3i)$$

$$\operatorname{Res}(f,0) = \left.\frac{e^{2zi}}{z^2-4z+13}\right|_{z=0} = \frac{1}{13}$$

$$\operatorname{Res}(f, 2+3i) = \left.\frac{e^{2zi}}{z(z-2+3i)}\right|_{z=2+3i} = \frac{e^{2(2+3i)i}}{(2+3i)\,6i} = \frac{e^{4i-6}(2-3i)}{(4+9)\,6i} =$$

$$\frac{e^{-6}(\cos(4)+i\sin(4))(2-3i)}{13\cdot 6i}.$$

ALLORA

$$(*) = \frac{\pi i}{13} + \frac{2\pi i}{13\cdot 6i}\cdot e^{-6}(\cos(4)+i\sin(4))(2-3i)$$, DA CUI

$$\operatorname{Im}(*) = \frac{\pi}{13} + \frac{\pi}{13\cdot 3}e^{-6}\left(2\sin(4) - 3\cos(4)\right)$$

(6.1) $$y'' - 4y' + 13y = \sin(2t)\, e^{-|t|}$$

Usiamo Fourier. Conviene passare all'equazione

(**) $$y'' - 4y' + 13y = e^{2it}\, e^{-|t|}$$

e alla fine prendere la parte immaginaria. Dato che:

$$\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{2}{\omega^2+1} \implies \mathcal{F}(e^{it} e^{-|t|}) = \frac{2}{(\omega-1)^2+1}$$

Per cui la sol. di (**) verifica

$$(-\omega^2 - 4i\omega + 13)\,\hat{y} = \frac{2}{(\omega-1)^2+1} \iff \hat{y} = \frac{-2}{(\omega^2+4i\omega-13)(\omega^2-2\omega+2)}$$

(la divisione si può fare perché $\omega^2+4i\omega-13$ non si annulla per $\omega \in \mathbb{R}$).

Le radici del denominatore sono $1 \pm i$ e $\pm 3 - 2i$.

Poniamo $$g(z) = \frac{-2\, e^{izt}}{(z^2+4iz-13)(z^2-2z+2)}$$ e calcoliamo i residui

$$\mathrm{Res}(g, 1+i) = \left.\frac{-2\, e^{izt}}{(z^2+4iz-13)(z-1+i)}\right|_{z=1+i} = \frac{-2\, e^{i(1+i)t}}{(1+2i-1+4i-4-13)(2i)}$$

$$= \frac{-e^{(-1+i)t}}{(-17+6i)i} = \frac{(17+6i)e^{-t}e^{it}}{(17^2+6^2)i} = \frac{(17+6i)e^{-t}e^{it}}{325i}$$

$$\mathrm{Res}(g, 1-i) = \frac{-2e^{izt}}{(z^2+4iz-13)(z-1-i)}\bigg|_{z=1-i} = \frac{-2e^{i(1-i)t}}{(1-2i-1+4i+4-13)(-2i)}$$

$$= \frac{e^{(1+i)t}}{(-9+2i)i} = \frac{-(9+2i)e^{t}e^{it}}{(81+4)i} = \frac{-(9+2i)e^{t}e^{it}}{85i}$$

$$\mathrm{Res}(g, 3-2i) = \frac{-2e^{izt}}{(z+3+2i)(z^2-2z+2)}\bigg|_{z=3-2i} = \frac{-2e^{i(3-2i)t}}{6(9-12i-4-6+4i+2)} =$$

$$\frac{-e^{(2+3i)t}}{3(1-8i)} = \frac{-(1+8i)e^{2t}e^{3it}}{3(1+64)} = \frac{-(1+8i)e^{2t}e^{3it}}{195}$$

$$\mathrm{Res}(g, -3-2i) = \frac{-2e^{izt}}{(z-3+2i)(z^2-2z+2)}\bigg|_{z=-3-2i} = \frac{-2e^{i(-3-2i)t}}{(-6)(9+12i-4+6+4i+2)} =$$

$$\frac{e^{(2-3i)t}}{3(13+16i)} = \frac{(13-16i)e^{2t}e^{-3it}}{3(169+256)} = \frac{(13-16i)e^{2t}e^{-3it}}{1275}$$

e allora la soluzione di $(**)$ è, per $t \geq 0$, :

$$y(t) = i \operatorname{Res}(g, 1+i) = \frac{(17+6i)e^{-t}e^{it}}{325}$$

mentre per $t \leq 0$

$$y(t) = -i\left(\operatorname{Res}(g, 1-i) + \operatorname{Res}(g, 3-2i) + \operatorname{Res}(g, -3-2i)\right) =$$

$$\frac{(9+2i)e^{t}e^{it}}{85} + \frac{(-8+i)e^{2t}e^{3it}}{195} + \frac{(-16-13i)e^{2t}e^{-3it}}{1275}$$

Prendendo la parte immaginaria si trova la soluzione del problema di partenza: per $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{325}\left(17\sin(t) + 6\cos(t)\right), \quad \text{mentre per } t \leq 0$$

$$y(t) = \frac{e^{t}}{85}\left(9\sin(t) + 2\cos(t)\right) + \frac{e^{2t}}{195}\left(-8\sin(3t) + \cos(3t)\right)$$

$$+\frac{e^{2t}}{1275}\left(16\sin(3t) - 13\cos(3t)\right) =$$

$$\frac{e^t}{85}\left(9\sin(t)+2\cos(t)\right)+$$

$$\frac{e^{2t}}{16575}\left(-8\cdot 85\sin(3t)+85\cos(3t)+16\cdot 13\sin(3t)-13\cdot 13\cos(3t)\right)$$

$$=\frac{e^t}{85}\left(9\sin(t)+2\cos(t)\right)-\frac{e^{2t}}{16575}\left(472\sin(3t)+84\cos(3t)\right)$$

AMMETTO CHE COME RISULTATO FA SCHIFO

(6.2) 1) Calcoliamo la norma L^1 di $f_n(x)=n^\alpha x^2 e^{-\frac{x}{n}}$

$$\|f_n\|_1=\int_0^{+\infty} n^\alpha x^2 e^{-\frac{x}{n}}\,dx=\left(\text{sostituzione } x=ny\to dx=n\,dy\right)$$

$$=\int_0^{+\infty} n^\alpha (ny)^2 e^{-y}\,n\,dy=n^{\alpha+3}\underbrace{\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\,dy}_{:=C}=C\,n^{\alpha+3}$$

Vediamo per quali α la serie $\sum f_n$ converge assolutamente in L^1

$$\sum \|f_n\|_1<+\infty \iff \sum n^{\alpha+3} \iff \alpha+3<-1 \iff \boxed{\alpha<-4}$$

Quindi se $\alpha < -3$ la serie converge in L^1.

D'altra parte vediamo che se $\alpha \geq -3$ la serie non converge in L^1.

Infatti se convergesse a una F, ne seguirebbe

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \sum_n f_n(x)\,dx = \sum_n \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_n c\, n^{\alpha+3} = +\infty.$$

(qui conto il fatto che $f_n \geq 0$ per cui $\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} |f_n| = c\, n^{\alpha+3}$).

per cui F non sarebbe L^1; ASSURDO.

Dunque $\sum f_n$ converge in L^1 $\iff$ $\boxed{\alpha < -3}$

(2) Vediamo la convergenza assoluta in L^2. Si ha:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} f_n^2(x)\,dx = \int_0^{+\infty} n^{2\alpha} x^4 e^{-\frac{2x}{n}}\,dx = \quad (x = ny)$$

$$= \int_0^{+\infty} n^{2\alpha} (ny)^4 e^{-2y}\, n\,dy = n^{2\alpha+5} C_1.$$ Dunque

$\|f_n\|_2 = \sqrt{C_1}\, n^{\alpha+\frac{5}{2}}$. Se $\alpha = -4$ $\|f_n\|_2 = \sqrt{C_1}\, n^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$$\sum_n \|f_n\|_2 = \sqrt{C_1} \sum_n \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty \Rightarrow \boxed{\text{CONVERGE}}$$

$$\begin{cases} y'' - 4y + 13y = f \\ y(t) = 0 \quad \text{per } t<0 \end{cases}$$

Usiamo la trasformata di Laplace $\mathcal{L}(y) = \check{y}$

$$\check{y}\,(z^2 - 4z + 13) = \check{f} \iff \check{y}(z) = \frac{\check{f}(z)}{z^2 - 4z + 13}$$

(1) Se $f = \delta \Rightarrow \check{f} = 1 \Rightarrow \quad \check{y}(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4z + 13}$

Ricaviamo $y(t)$ usando i residui; se $g(z) = \dfrac{e^{zt}}{z^2 - 4z + 13}$

$$y(t) = \operatorname{Res}(g, 2+3i) + \operatorname{Res}(g, 2-3i) = 2\operatorname{Re}(g, 2+3i)$$

$$= 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{zt}}{2z-4}, 2+3i\right) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{(2+3i)t}}{6i}\right) =$$

$$= \frac{e^{2t}}{3}\sin(3t) \qquad (\,y(t) = 0 \text{ se } t<0\,)$$

(2) Se $f(t) = \cos(t) \Rightarrow \check{f}(z) = \dfrac{z}{z^2+1} \Rightarrow y(z) = \dfrac{z}{(z^2 - 4z + 13)(z^2+1)}$

Come nel caso precedente, posto $g(z) = \dfrac{z\,e^{zt}}{(z^2 - 4z + 13)(z^2+1)}$

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}(g, 2+3i) + \mathrm{Res}(g, i)\right) =$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\left.\frac{z e^{zt}}{(2z-4)(z^2+1) + (z^2-4z+13)(2z)}\right|_{z=2+3i} + \right.$$

$$\left. + \left.\frac{z e^{zt}}{(2z-4)(z^2+1) + (z^2-4z+13)(2z)}\right|_{z=i} \right) =$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{(2+3i)\, e^{(2+3i)t}}{6i\,(4+12i-9+1)} + \frac{i\, e^{it}}{(-1-4i+13)(2i)} \right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(e^{2t} \frac{(-i)(2+3i)\, e^{3it}}{3\,(-4+12i)} + \frac{e^{it}}{12-4i} \right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(3-2i)(-1-3i)\, e^{3it}}{12\,(1+9)} e^{2t} + \frac{(3+i)\, e^{it}}{4\,(9+1)} \right) =$$

$$\mathrm{Re}\ \frac{(-9-7i)\, e^{3it}}{120} e^{2t} + \frac{3\cos(t) - \sin(t)}{40} =$$

$$\frac{-9\cos(3t) + 7\sin(3t)}{120} e^{2t} + \frac{3\cos(t) - \sin(t)}{40}$$

(C.2) (1) $(t^2-1)u = 1$.

Cerchiamo una soluzione $\bar{u}$. "Moralmente" $\bar{u} = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$

Verifichiamo che $\bar{u} = (v.p)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\right) - (v.p)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right)$

verifica l'equazione. Per questo ricordiamo che $\left((v.p)\frac{1}{t}\right)\cdot t = 1$

$\Rightarrow \left((v.p)\frac{1}{t-a}\right)\cdot(t-a) = 1$ (qualunque sia a). Allora

$\bar{u}(t^2-1) = \bar{u}(t-1)(t+1) = \frac{1}{2}\left\{(v.p)\frac{1}{t-1}\cdot(t-1)(t+1) - (v.p)\frac{1}{t+1}\cdot(t+1)(t-1)\right\} =$

$\frac{1}{2}\left\{(t+1)-(t-1)\right\} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$. Allora la sol. generale è

$u = \bar{u} + u_0$ con u_0 sol. di $(t^2-1)u_0 = 0 \Leftrightarrow u_0 = c\delta_1 + d\delta_{-1}$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}(v.p)\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}(v.p)\frac{1}{t+1} + c\delta_1 + d\delta_{-1}, \quad c,d \in \mathbb{C}.$$

(2) Verifichiamo che $\bar{u} = -\delta'$ verifica $tu = \delta$. Infatti

$t\delta = 0 \Rightarrow 0 = (t\delta)' = \delta + t\delta' \Leftrightarrow t\delta' = -\delta$!!

Quindi la sol. generale è $u = -\delta' + c\delta \quad c \in \mathbb{C}$.