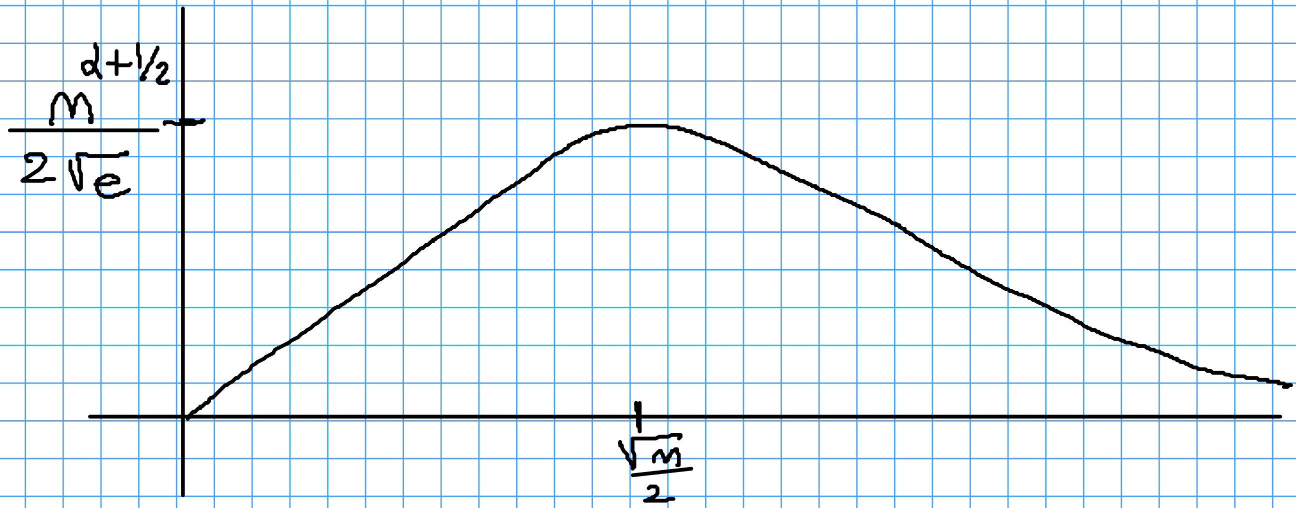
A.1

$f_n = n^\alpha x \, e^{-\frac{2x^2}{n}}$. Facciamo uno studio di f_n

$f_n(0) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$; $f_n'(x) = n^\alpha \left(e^{-\frac{2x^2}{n}} - \frac{4x^2}{n} e^{-\frac{2x^2}{n}} \right) =$

$n^{\alpha-1} e^{-\frac{2x^2}{n}} (n - 4x^2)$; $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{n}}{2}$; $f_n\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \frac{n^{\alpha+1/2}}{2\sqrt{e}}$



$\| f_n \|_\infty = \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{e}}$

(a) Notiamo che, se $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ x & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

Dato che la convergenza puntuale INDIVIDUA l'eventuale limite uniforme, possiamo subito escludere $\alpha > 0$.

Anche per $\alpha = 0$ non può esserci conv. uniforme, infatti se $f_n \to f$ unif. su $[0,+\infty[$, ne seguirebbe

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

che è assurdo se $f(x)=x$.

Quindi se $f_n \to f$ unif. deve essere $\alpha<0$ e $f(x)=0$.

Ma allora il tutto si riduce a

$$\|f_n\|_\infty \to 0 \iff \frac{n^{\alpha+1/2}}{2\sqrt{e}} \to 0 \iff \alpha+\frac{1}{2}<0 \iff \boxed{\alpha<-\frac{1}{2}}$$

(b) Per la convergenza totale della serie si deve considerare

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\| < +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\frac{1}{2}} < +\infty \iff \alpha+\frac{1}{2}<-1 \iff \boxed{\alpha<-\frac{3}{2}}$$

(c) Per la convergenza uniforme su $[0,1]$ calcoliamo $\|f_n\|_{\infty,[0,1]}$.

Dal grafico di f_n risulta che il max di f_n viene assunto nell'estremo $x=1$, cioè $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = n^\alpha e^{-\frac{2}{n}}$

Proviamo a verificare la convergenza totale su $[0,1]$ della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[0,1]} < +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{\alpha}}{\sqrt[n]{e^2}} < +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha} < +\infty \iff \alpha < -1$$

Dato che $-\frac{5}{4} < -1$ la serie converge totalmente e quindi uniform.

(d) Mostriamo che per $\alpha \geq -\frac{3}{2}$ la serie non può convergere unif. (abbiamo già visto, nel punto b, che per $\alpha < -\frac{3}{2}$ la serie converge totalmente e dunque unif.). Se infatti

$$F \underset{(\text{unif.})}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad , \text{ avremmo } \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0 .$$

Però $$F(x) = \int_1^{+\infty} [y]^{\alpha} \, x \, e^{-\frac{2x^2}{[y]}} dy \geq x \int_1^{+\infty} (y-1)^{\alpha} e^{-\frac{2x^2}{y-1}} dy =$$

$$x \int_0^{+\infty} y^{\alpha} e^{-\frac{2x^2}{y}} dy = \left(\frac{2x^2}{y} = t \iff y = \frac{2x^2}{t} \iff dy = -\frac{2x^2}{t^2} dt \right)$$

$$x\int_{+\infty}^{0}\left(\frac{2x^2}{t}\right)^{\alpha}\left(-\frac{2x^2}{t^2}\right)e^{-t}\,dt = x(2x^2)^{\alpha+1}\int_0^{+\infty} t^{-2-\alpha}e^{-t}\,dt$$

Questa eguaglianza mostra che $F(x)=+\infty$ se $\alpha\geq -1$, dato che in questo caso l'integrale diverge. Se invece $-\frac{3}{2}\leq\alpha<-1$ l'integrale converge, ma

$$F(x)\geq 2^{\alpha+1}x^{2\alpha+3}\int_0^{+\infty}t^{-2-\alpha}e^{-t}\,dt \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>-\frac{3}{2} \\ \text{costante}>0, & \text{se } \alpha=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

e quindi $F(x)$ non può tendere a zero.

In definitiva $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. unif. $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\alpha<-\frac{3}{2}}$

$\boxed{\text{B.2}}$ Calcoliamo $\|f_n\|_1=\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt$

$$\int_0^{+\infty}n^{\alpha}x\,e^{-\frac{2x^2}{n}}\,dx = \left(x=\sqrt{n}\,y,\ dx=\sqrt{n}\,dy\right) = \int_0^{+\infty}n^{\alpha}\sqrt{n}\,y\,e^{-2y^2}\sqrt{n}\,dy =$$

$$= n^{\alpha+1}\int_0^{+\infty}y\,e^{-2y^2}\,dy$$

Perché la serie converge assolutamente in L^1 deve essere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+1} < +\infty \iff \alpha+1 < -1 \iff \boxed{\alpha < -2}$$

VEDI LA PAG. SUCCESSIVA PER LA CONCLUSIONE

Calcoliamo ora la norma $L^2(0,+\infty)$:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \left(n^\alpha x e^{-\frac{2x^2}{n}}\right)^2 dx = \int_0^{+\infty} n^{2\alpha} x^2 e^{-\frac{4x^2}{n}} dx =$$

$$\int_0^{+\infty} n^{2\alpha} (\sqrt{n}y)^2 e^{-4y^2} \sqrt{n}\, dy = n^{2\alpha+\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y^2} dy$$

$$\|f_n\|_2 = n^{\alpha+\frac{3}{4}} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y^2} dy$$

Allora la serie converge assolutamente in $L^2 \iff$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+\frac{3}{4}} < +\infty \iff \alpha + \frac{3}{4} < -1 \iff \alpha < -\frac{7}{4},$$

Dato che $-2 < -\frac{7}{4}$, per $\alpha = -2$ la serie converge assolut. $\Rightarrow$ Converge

Nel punto relativo alla conv. L^1 si è visto che la serie $\sum_n f_n$ converge assolutamente in $L^1(0,+\infty)$ se $\alpha < -2$

Quindi per $\alpha < -2$ la serie converge in L^1.

Mostriamo che se $\alpha \geq 2$ la serie non converge - ne seguirà che la serie converge esattamente per $\alpha < -2$. In effetti se

$$\sum_n f_n \xrightarrow{L^1} F \qquad \text{ne seguirebbe} \qquad F \in L^1 \text{ e } \int_0^{+\infty} F(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n .$$

Ma per quanto visto prima

$$\sum_n \int_0^{+\infty} f_n = \text{cost.} \sum_n n^{\alpha+1} = +\infty \text{ se } \alpha+1 \geq -1, \text{ cioè se } \alpha \geq 2$$

Se ne deduce che per $\alpha \geq -2$ la serie non può convergere in L^1

$\boxed{A.2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\,(x^2+2x+10)}\,dx$$

Poniamo a $\quad (v.p.) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x\,(x^2+2x+10)}\,dx \qquad (*)$

Il denominatore si annulla per $x=0$, $x=-1\pm 3i$, tutte radici semplici. Poniamo $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z\,(z^2+2z+10)}$ e calcoliamo i residui

$$\mathrm{Res}(f,0)=\left.\frac{e^{iz}}{z^2+2z+10}\right|_{z=0} = \frac{1}{10}$$

$$\mathrm{Res}(f,-1+3i) = \left.\frac{e^{iz}}{z\,(z+1+3i)}\right|_{z=-1+3i} = \frac{e^{i(-1+3i)}}{(-1+3i)\,(6i)} =$$

$$\frac{e^{-3}\,e^{-i}\,(-1-3i)}{6i\,(1+9)} = -\frac{(1+3i)\,e^{-i}}{6i\cdot 10\cdot e^{3}}.$$

DALLA TEORIA

$$(*) = \pi i\,\mathrm{Res}(f,0) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,-1+3i) = \frac{\pi i}{10} - \frac{\pi\,(1+3i)\,e^{-i}}{30\,e^{3}}$$

da cui, prendendo la parte immaginaria troviamo il risultato richiesto all'inizio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+2x+10)}\,dx = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{30e^3}\left(-\sin(1)+3\cos(1)\right) = \boxed{\frac{\pi}{10} + \frac{\pi(\sin(1)-3\cos(1))}{30e^3}}$$

$\boxed{B.1}$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = \cos(t)\, e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Passiamo all'equazione

$$(**) \quad \begin{cases} y'' + 2y' + 10y = e^{it}\, e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Trasformiamo secondo Fourier la funzione $b(t) = e^{it} e^{-|t|}$:

$$\hat{b}(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{it} e^{-|t|}\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega-1) = \frac{2}{1+(\omega-1)^2} = \frac{2}{\omega^2-2\omega+2}$$

Allora applicando $\mathcal{F}$ all'equazione $(**)$

$$(-\omega^2+2\omega i+10)\,\hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega) \iff \hat{y}(\omega) = \frac{-2}{(\omega^2-2\omega i-10)(\omega^2-2\omega+2)}$$

Poniamo $g(z) = \dfrac{-2e^{izt}}{(z^2-2iz-10)(z^2-2z+2)}$ e calcoliamone i residui nelle radici del denominatore, che sono

$z_{1,2} = i \pm 3$ e $z_{3,4} = 1 \pm i$

$$\text{Res}(g, i+3) = \left.\frac{-2e^{izt}}{(2z-2i)(z^2-2z+2)+\underbrace{\cdots}_{=0}}\right|_{z=i+3} =$$

$$\frac{-2e^{i(i+3)t}}{6(-1+6i+9-2i-6+2)} = \frac{-e^{(-1+3i)t}}{3(4+4i)} = \frac{-e^{-t}e^{3it}(1-i)}{24}$$

$$\text{Res}(g, i-3) = \left.\frac{-2e^{izt}}{(2z-2i)(z^2-2z+2)+\underbrace{\cdots}_{=0}}\right|_{z=i-3} =$$

$$\frac{-2e^{i(i-3)t}}{(-6)(-1-6i+9-2i+6+2)} = \frac{e^{(-1-3i)t}}{3(16-8i)} = \frac{e^{-t}e^{-3it}(2+i)}{120}$$

$$\text{Res}(g, 1+i) = \left.\frac{-2e^{izt}}{\underbrace{\cdots}_{=0}+(z^2-2iz-10)(2z-2)}\right|_{z=1+i} =$$

$$\frac{-2e^{i(1+i)t}}{(1+2i-1-2i+2-10)(2i)}=\frac{-e^{-t}e^{it}}{-8i}=-\frac{e^{-t}e^{it}}{8}\,i$$

$$\mathrm{Res}(g,1-i)=\frac{-2e^{izt}}{\underbrace{\ldots}_{=0}+(z^2-2iz-10)(2z-2)}\Bigg|_{z=1-i}=$$

$$\frac{-2e^{i(1-i)t}}{(1-2i-1-2i-2-10)(-2i)}=\frac{e^{t}e^{it}}{(-12-4i)\,i}=\frac{ie^{t}e^{it}}{4(3+i)}=\frac{i(3-i)e^{t}e^{it}}{40}$$

Dunque la soluzione $v(t)$ di $(**)$ vale:

PER $t>0$ $\quad v(t)=i\Big(\mathrm{Res}(i+3)+\mathrm{Res}(i-3)+\mathrm{Res}(i+1)\Big)=$

$$-\frac{e^{-t}e^{3it}(1+i)}{24}+\frac{e^{-t}e^{-3it}(-1+2i)}{120}+\frac{e^{-t}e^{it}}{8}$$

PER $t<0$ $\quad v(t)=-i\,\mathrm{Res}(1-i)=\dfrac{(3-i)e^{t}e^{it}}{40}.$

Ne segue che la soluzione originaria $y(t)=\mathrm{Re}(v(t))$, vale:

PER $t>0$

$$y(t) = \frac{-e^{-t}\left(\cos(3t)-\sin(3t)\right)}{24} + \frac{e^{-t}\left(-\cos(3t)+2\sin(3t)\right)}{120} +$$

$$-\frac{e^{-t}\cos(t)}{8} = e^{-t}\left(-\frac{\cos(3t)}{20}-\frac{\sin(3t)}{30}+\frac{\cos(t)}{8}\right)$$

PER $t<0$

$$y(t) = e^{t}\,\frac{3\cos(t)+\sin(t)}{40}$$

$\boxed{C.1}$

$$\begin{cases} y''+2y'+10y = f \\ y(t)=0 \text{ se } t<0 \end{cases}$$

Applicando Laplace $\quad \check{y}(z) = \dfrac{\check{f}(z)}{z^2+2z+10}$

- Se $f=\delta \Rightarrow \check{f} = z \Rightarrow \check{y}(z) = \dfrac{z}{z^2+2z+10}$

e quindi, posto $g(z) = \frac{z e^{zt}}{z^2+2z+10}$, per $t>0$

$y(t) = \operatorname{Res}(g, -1+3i) + \operatorname{Res}(g, -1-3i) =$

$2\operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}(g, -1+3i)\right) = 2\operatorname{Re}\left(\left.\frac{z e^{zt}}{2z+2}\right|_{z=-1+3i}\right) =$

$2\operatorname{Re}\left[\frac{(-1+3i)\, e^{(-1+3i)t}}{6i}\right] = \frac{1}{3}\operatorname{Re}\left[(3+i)\, e^{(-1+3i)t}\right] =$

$\frac{1}{3} e^{-t}\left(3\cos(3t) - \sin(3t)\right)$

DUNQUE $y(t) = \frac{H(t)}{3} e^{-t}\left(3\cos(3t) - \sin(3t)\right)$

- Se $f(t) = H(t)\cos(t) \Rightarrow \check{f}(z) = \frac{z}{z^2+1} \Rightarrow$

$\check{y}(z) = \frac{z}{(z^2+2z+10)(z^2+1)}$, poniamo $g(z) = \frac{z e^{zt}}{(z^2+2z+10)(z^2+1)}$

$\Rightarrow$ per $t > 0$

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}(g, -1+3i) + \mathrm{Res}(g, i)\right) =$$

$$2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{z\, e^{zt}}{(2z+2)(z^2+1) + \underbrace{\cdots}_{=0}} \Bigg|_{z=-1+3i} + \frac{z\, e^{zt}}{\underbrace{\cdots}_{=0} + (z^2+2z+10)\, 2z} \Bigg|_{z=i} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \frac{(-1+3i)\, e^{(-1+3i)t}}{3i\,(1-6i-9+1)} + \frac{i\, e^{it}}{(-1+2i+10)\; i} \right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \frac{(-1+3i)(6+7i)\, e^{(-1+3i)t}}{3(36+49)} + \frac{(9-2i)\, e^{it}}{81+4} \right\} =$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{(-27+11i)\, e^{(-1+3i)t}}{3 \cdot 85} + \frac{(9-2i)\, e^{it}}{85} \right\} =$$

$$- \frac{e^{-t}}{255}\left(27\cos(3t) + 11\sin(3t) \right) + \frac{9\cos(t) + 2\sin(t)}{85}$$

$\boxed{\text{C.2}}$ $\quad \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) u = 1 \iff \frac{t^2}{1+t^2}\, u = 1 \iff t^2 u = t^2 + 1$

(l'ultima vale perché $t^2+1 \neq 0 \;\forall t$). Una possibile u è

$$\bar{u} = \frac{1+t^2}{t^2} = \frac{1}{t^2} + 1 \quad \text{dove} \quad \frac{1}{t^2} = -\frac{d}{dt}\left((v.p)\frac{1}{t}\right) = -\frac{d^2}{dt^2} \ln|t|$$

che, come visto a lezione, è una distribuzione che moltiplicata per t^2 restituisce la funzione 1.

A $\bar{u}$ vanno aggiunte tutte le soluzioni di $t^2 u = 0$.

Per trovarle possiamo alle trasformate: $\mathcal{F}(t^2 u) = 0 \iff -\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{u} = 0$

$\iff \hat{u} = c + d\,\omega \quad (c, d \in \mathbb{C}) \iff u = c\,\delta + d\,\delta'' \;;\; c, d \in \mathbb{C}$

(i due d non sono gli stessi, ma non importa quando si prendono tutti)

DUNQUE

$$\boxed{u = 1 + \frac{1}{t^2} + c\,\delta + d\,\delta' \,, \quad c, d \in \mathbb{C}}$$

- Applichiamo Fourier. $\mathcal{F}(t^2 u) = \mathcal{F}(\delta) = 1 \iff -\frac{d^2\hat{u}}{d\omega^2} = 1$

$\iff \hat{u} = -\frac{\omega^2}{2} + a\omega + b \iff u = \frac{1}{2}\delta'' + a\,\delta' + b\,\delta \quad (a, b \in \mathbb{C})$

VERIFICA che $\frac{\delta''}{2}$ è soluzione: dato $\varphi \in \mathcal{D}$ $\langle t^2 \delta'', \varphi\rangle = \langle \delta'', t^2\varphi\rangle =$
$\langle \delta, (t^2\varphi)''\rangle = \langle \delta, 2\varphi + 2t\varphi' + t^2\varphi''\rangle = 2\langle \delta, \varphi\rangle \iff \boxed{t^2\delta'' = 2\delta}$