Complementi di Matematica. Compito del 16/2/09

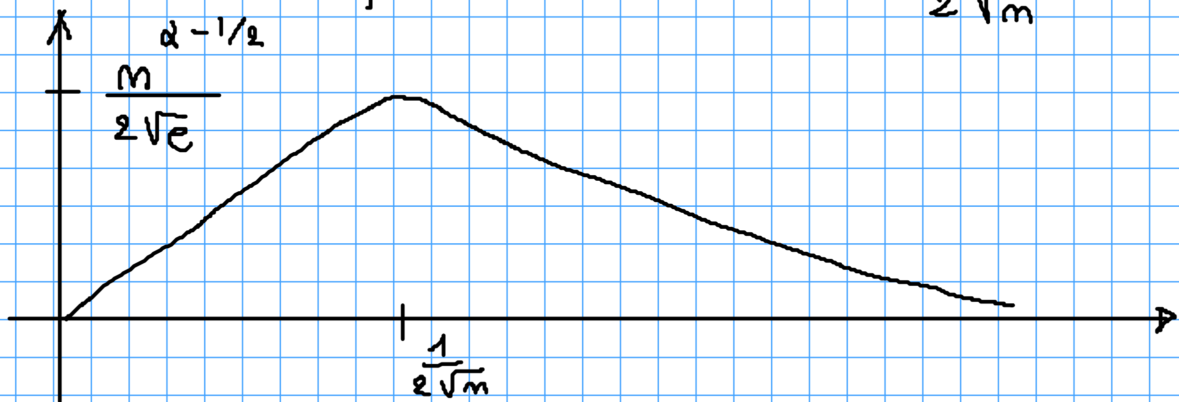
A.1) $f_n(x) = n^{\alpha} x e^{-2nx^2}$ su $[0,+\infty[$

Tracciamo preventivamente il grafico di f_n. Si ha

$f_n(0) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$;

$f_n'(x) = n^{\alpha}(1-4nx^2)e^{-2nx^2}$; $f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2\sqrt{n}} =: x_n$

$$f_n(x_n) = \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{e}}$$



(1) Da quanto sopra si ha che:

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, dato che se $x=0$ $f_n(x)=0$, mentre se $x>0$ l'esponenziale "vince"

Dunque l'eventuale limite uniforme di f_n – se esiste – è la funzione nulla, cioè (f_n) conv. unif. $\iff \|f_n\|_\infty \to 0$

Dato che $\|f_n\|_\infty = \dfrac{n^{\alpha+1/2}}{2\sqrt{e}}$, tale convergenza a zero si realizza se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} < 0 \iff \boxed{\alpha < \frac{1}{2}}$

(2) La convergenza totale significa che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$ e quindi che la serie armonica $\sum n^{\alpha+1/2}$ deve convergere. Questo accade se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} < -1 \iff \boxed{\alpha < -\frac{1}{2}}$

(3) Dal grafico di f_n si vede che il massimo su $[1,+\infty[$ è assunto nel punto $x=1$, cioè $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = f_n(1) = n^{\alpha} e^{-2n}$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} e^{-2n}$ è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è totalmente, e dunque $\boxed{\text{uniformemente convergente su } [1,+\infty[}$

(4) Per il punto 2 sappiamo che la serie converge uniformemente se $\alpha < -\frac{1}{2}$ (conv. totale $\Rightarrow$ conv. uniforme). Mostriamo che la serie non converge per $\alpha = -\frac{1}{2}$. Infatti se k è intero

$$(*) \quad \sum_{m=1}^{\infty} f_m\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \geqslant \sum_{m=1}^{k} \frac{m^{-1/2}}{\sqrt{k}} e^{-\frac{2m}{k}} \geqslant \sum_{m=1}^{k} \frac{k^{-1/2}}{\sqrt{k}} e^{-2} = \frac{e^{-2}}{k} \sum_{m=1}^{k} = e^{-2}$$

Ne segue che la serie non può convergere uniformemente perché se così fosse

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_m\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{k \to +\infty} f_m\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} 0 = 0$$

in contrasto con $(*)$. Dunque la serie non converge se $\alpha = -1/2$.
Se poi $\alpha > -\frac{1}{2}$ la serie è ancora più grande e per questo motivo non può tendere a zero nell'origine $\Rightarrow$ CONVERGE $\Longleftrightarrow \alpha < -1/2$

(B.2) Calcoliamo la norma $L^1(0,+\infty)$ di f_m:

$$\|f_m\|_1 = \int_0^{+\infty} f_m(x)\, dx = \int_0^{+\infty} m^{\alpha} x e^{-2mx^2} dx = \left(x = \frac{y}{\sqrt{m}}, dx = \frac{dy}{\sqrt{m}} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} m^{\alpha} \frac{y}{\sqrt{m}} e^{-2y^2} \frac{dy}{\sqrt{m}} = m^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} y e^{-2y^2} dy = C_1 m^{\alpha-1}$$

Allora se $\alpha - 1 < -1$, cioè se $\alpha < 0$, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_1 < +\infty$

da cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in L^1.

Mostriamo che per $\alpha \geq 0$ tale serie non converge in L^1. Se così fosse avremmo

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} = +\infty \quad \text{ASSURDO}$$

Quindi la serie converge in L^1 se e solo se $\boxed{\alpha < 0}$

Passiamo a L^2:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \left(n^\alpha x e^{-2nx^2}\right)^2 dx = \int_0^{+\infty} n^{2\alpha} x^2 e^{-4nx^2} dx = \text{(come prima)}$$

$$\int_0^{+\infty} n^{2\alpha} \frac{y^2}{n} e^{-4y^2} \frac{1}{\sqrt{n}}\, dy = n^{2\alpha - \frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y^2} dy \implies$$

$$\|f_n\|_2 = n^{\alpha - \frac{3}{4}} \sqrt{\int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y^2} dy} = C_2\, n^{\alpha - \frac{3}{4}}.$$

Se $\alpha - \frac{3}{4} < -1$, cioè se $\alpha < -\frac{1}{4}$ la serie converge assolutamente (L^2) e quindi converge in L^2

Purtroppo $-\frac{1}{4} < 0$ e quindi questo non dice che la serie non converga per $\alpha = 0$ (sebbene sia un forte indizio).

A questo punto l'esercizio diventa più difficile di quanto pensassi al momento di scriverlo (in effetti l'idea iniziale era di mettere $\alpha = -1/2$ ...). Comunque la serie NON converge.

Riporto la dimostrazione di questo fatto —

la valutazione comunque terrà conto della difficoltà.

In effetti se la serie convergesse in $L^2(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ la serie convergerebbe in $L^2(0,1)$ $\Rightarrow$ la serie convergerebbe in $L^1(0,1)$. Ma allora

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x e^{-nx^2}\,dx =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ny}\,dy = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-ny}}{-n}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-n}}{n} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n} = +\infty \quad \text{(la seconda serie converge)} \qquad \text{ASSURDO}$$

(A.2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2-2x+10)}\,dx = (*)$$

Il denominatore ha radici $z_1=0$, $z_{2,3} = 1\pm 3i$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{2ix}}{x(x^2-2x+10)}}_{f(x)}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, 1+3i) + \pi i\,\mathrm{Res}(f, 0) =$$

$$2\pi i \left.\frac{e^{2iz}}{z(z-1+3i)}\right|_{z=1+3i} + \pi i \left.\frac{e^{2iz}}{z^2-2z+10}\right|_{z=0} =$$

$$2\pi i \frac{e^{2i-6}}{(1+3i)\,6i} + \frac{\pi i}{10} = \frac{\pi}{3} e^{-6} \frac{e^{2i}(1-3i)}{1+9} + \frac{\pi i}{10} =$$

$$\frac{\pi e^{-6}}{30}\Big[\big(\cos(2)+3\sin(2)\big) + i\big(-3\cos(2)+\sin(2)\big)\Big] + \frac{\pi i}{10} \Rightarrow$$ Passando alla parte immagin.

$$(*) = \frac{\pi}{30e^6}\big(\sin(2)-3\cos(2)\big) + \frac{\pi}{10}$$

(B.1) $$y'' - 2y' + 10y = \cos(t)\, e^{-|t|}$$

Consideriamo $$v'' - 2v' + 10v = \underbrace{e^{it} e^{-|t|}}_{b(t)} \qquad (**)$$

Allora $$\hat{b}(\omega) = \frac{2}{\omega^2 - 2\omega + 2}$$

(vedi correzione compito 26/1/09). Dunque la sol v di $(**)$ verifica

$$\hat{v}(\omega)\left(-\omega^2 - 2i\omega + 10\right) = \hat{b}(\omega) \Longleftrightarrow \hat{v}(\omega) = \frac{-2}{(\omega^2 + 2i\omega - 10)(\omega^2 - 2\omega + 2)}$$

Poniamo $$g(z) := \frac{-2\, e^{izt}}{(\omega^2 + 2i\omega - 10)(\omega^2 - 2\omega + 2)}.$$ Notiamo che i poli

di g sono $1 \pm i$ e $\pm 3 - i$, semplici. Con calcoli standard:

$$\operatorname{Res}(g, 3-i) = -\frac{e^{t} e^{3it}}{24}(1+i);$$

$$\operatorname{Res}(g, -3-i) = \frac{e^{t} e^{-3it}}{120}(2-i);$$

$$\mathrm{Res}(g, 1+i) = \frac{e^{-t} e^{it}}{40}(1-3i)$$

$$\mathrm{Res}(g, 1-i) = \frac{e^{t} e^{it}}{8} i$$

Da cui si ottiene per $t \geq 0$

$$v(t) = \frac{e^{-t} e^{it}}{40}(1-3i)\, i = \frac{e^{-t} e^{it}}{40}(3+i)$$

mentre per $t \leq 0$

$$v(t) = \frac{-e^{t} e^{3it}}{24}(1+i)(-i) + \frac{e^{t} e^{-3it}}{120}(2-i)(-i) + \frac{e^{t} e^{it}}{8} =$$

$$\frac{e^{t}}{120}\left\{-5e^{3it}(1-i) - e^{-3it}(1+2i) + 15 e^{it}\right\}$$

Passando alla parte reale si ha, per $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{40}\left(3\cos(t) - \sin(t)\right)$$

mentre per $t \leq 0$

$$y(t) = \frac{e^{t}}{120}\left\{-6\cos(3t) - 7\sin(3t) + 15\cos(t)\right\}$$

(C.1) $\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = f \\ y(t) = 0 \quad \text{per } t < 0 \end{cases}$

Applicando Laplace

$$\check{y}(z) = \frac{\check{f}(z)}{z^2 - 2z + 10}$$

(1) caso $f = \delta' \Rightarrow \check{f} = z \Rightarrow \check{y}(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 10}$

$$\Rightarrow y(t) \underset{(t>0)}{=} \operatorname{Res}\left(g(z), 1+3i\right) + \operatorname{Res}\left(g(z), 1-3i\right)$$

$$\left(\text{dove } g(z) = \frac{z\,e^{zt}}{z^2 - 2z + 10}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\left.\frac{z\,e^{zt}}{2z - 2}\right|_{z = 1+3i}\right) =$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{(1+3i)\,e^{(1+3i)t}}{6i}\right) = \frac{e^{t}}{3}\,\mathrm{Re}\left((3-i)\,e^{3it}\right) =$$

$$\frac{e^t}{3}\left(3\cos(3t)+\sin(3t)\right) \Rightarrow y(t)=\frac{H(t)\,e^t}{3}\left(3\cos(3t)+\sin(3t)\right)$$

(2) $f(t) = H(t)\cos(t) \Rightarrow \check{f}(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ $=$

$$\check{y}(z) = \frac{z}{(z^2-2z+10)(z^2+1)} \Rightarrow \quad (\text{per } t>0)$$

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{z\,e^{zt}}{(z^2-2z+10)(z^2+1)}, 1+3i\right)\right) +$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{z\,e^{zt}}{(z^2-2z+10)(z^2+1)}, i\right)\right) =$$

$$\frac{e^t}{255}\left(-27\cos(3t)+11\sin(3t)\right) + \frac{1}{85}\left(9\cos(t)-2\sin(t)\right)$$

C.2

$$\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)u = 1 \iff \frac{t^2-1}{t^2+1}\,u = 1$$

una soluzione è data da $\bar{u} = \dfrac{t^2+1}{t^2-1} \underset{(\text{DEF})}{=} 1 - \mathrm{v.p}\left(\dfrac{1}{t-1}\right) + \mathrm{v.p}\left(\dfrac{1}{t+1}\right)$

(si verifica moltiplicando che $\bar{u}$ risolve il problema)

A $\bar{u}$ dobbiamo aggiungere tutte le soluzioni di $\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)u=0$

$\iff (t^2-1)u=0 \iff u = c\,\delta_1 + d\,\delta_{-1} \quad (c, d \in \mathbb{C})$

Dunque la soluzione richiesta è

$$u = \frac{1}{2}\left(-(v.p.)\frac{1}{t-1} + (v.p.)\frac{1}{t+1}\right) + c\,\delta_1 + d\,\delta_{-1}$$

$$c, d \in \mathbb{C}$$

(2)

Per quanto riguarda il problema $(t^2-1)u = \delta_1$, applichiamo Fourier. Allora $-\hat{u}'' - \hat{u} = e^{-i\omega}$. Risolvendo l'equazione

$$\hat{u}(\omega) = -\frac{i\omega}{2}e^{-i\omega} + c\,e^{i\omega} + d\,e^{-i\omega} \implies \begin{cases} \mathcal{F}(\delta_1) = e^{-i\omega} \\ \mathcal{F}(\delta_0') = i\omega \end{cases}$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}\,\delta_1' + c\,\delta_{-1} + d\,\delta_1 \qquad \text{per } c, d \in \mathbb{C}$$