Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 16 febbraio 2009

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Sia α un parametro reale e si consideri la successione di funzioni $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ definite da $f_n(x) := n^\alpha x e^{-2nx^2}$.

1. Si dica per quali valori di α la successione (f_n) converge uniformemente su $[0,+\infty[$;
2. Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[0,+\infty[$.
3. Si dica se per $\alpha = -\frac{1}{2}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[1,+\infty[$.
4. $(\star)$ Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0,+\infty[$.

(a.2) Si calcoli l'integrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2-2x+10)}\,dx.$$

(b.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:
$$\begin{cases} y''-2y'+10y=\cos(t)e^{-|t|} \\ y\in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

(b.2) Dati il parametro reale α e la successione di funzioni del punto (a.1)

1. si trovino i valori di α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0,+\infty[)$;
2. si dica se, per $\alpha=0$, la la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^2([0,+\infty[)$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si consideri il problema differenziale su $\mathbf{R}$:
$$\begin{cases} y''-2y'+10y=f \\ y(t)=0 \text{ per } t<0. \end{cases}$$

Si trovi la soluzione y nei due casi seguenti:

1. $f=\delta'$;
2. $f(t)=H(t)\cos(t)$.

(c.2) Si trovino tutte le distribuzioni u tali che:

1. $\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)u=1$;
2. $(\star)$ $(t^2-1)u=\delta_1$.