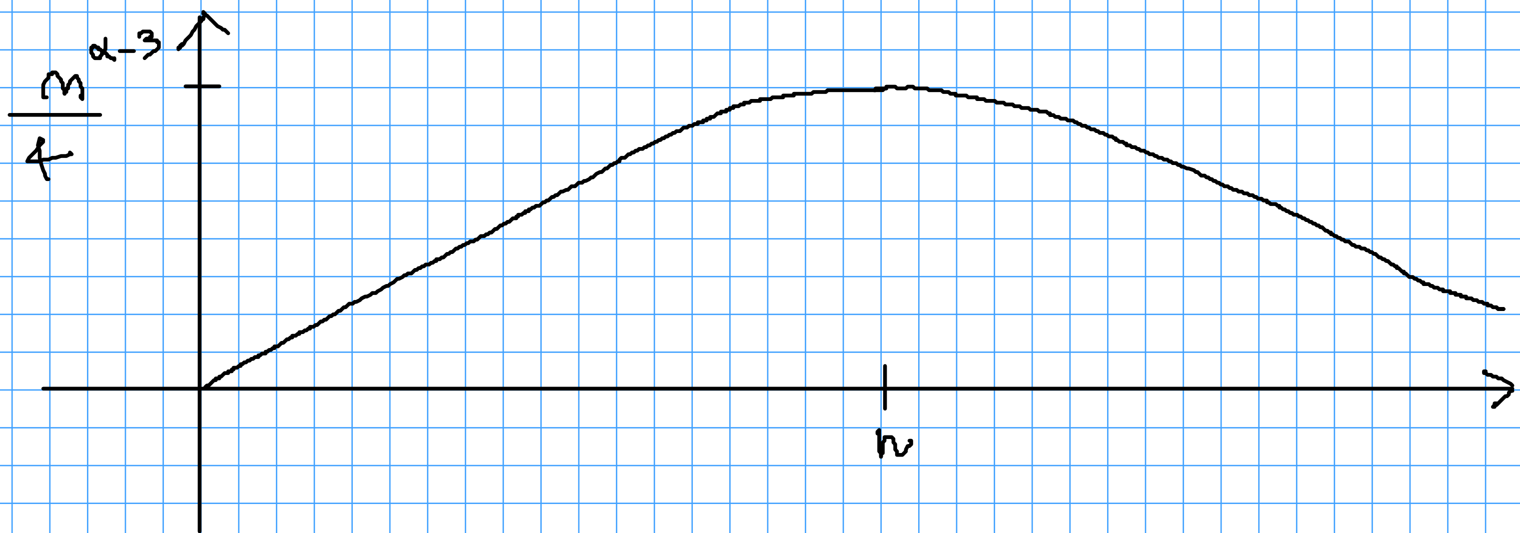
(A1) $\quad f_n(x) := \dfrac{n^\alpha x}{3n^4 + x^4} \qquad x \geq 0$

Studiamo $f_n(x)$: $\quad f_n(0) = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

$$f_n'(x) = n^\alpha \frac{3n^4 + x^4 - 4x^3 x}{(3n^4+x^4)^2} = n^\alpha \frac{3n^4 - 3x^4}{(3n^4+x^4)^2} \quad ; \quad f_n'(x) = 0 \iff x = n$$

$(x > 0 \,!!)$

$$\Rightarrow \max_{x\geq 0} f_n = f_n(n) = \frac{n^\alpha\, n}{3n^4 + n^4} = \frac{n^{\alpha-3}}{4}$$



Si vede allora che:

- Per $x > 0$ fissato $\quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4 \\ x/3 & \text{se } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$

Dunque

$f_n \to 0$ puntualmente se $\alpha < 4$

$f_n \to g$ puntualmente se $\alpha = 4$, dove $g(x) = \frac{x}{3}$.

f_n NON HA LIMITE PUNTUALE (finito), eccetto che in $x=0$, se $\alpha > 4$

IN PARTICOLARE se $\alpha > 4$ f_n non ammette limite uniforme su $[0,+\infty[$. E non lo ammette neanche per $\alpha = 4$ perché se f_n convergesse $\Rightarrow f_n \to \frac{x}{3}$ e $\frac{x}{3}$ non tende a zero all'infinito (mentre f_n sì)

SE NE RICAVA CHE l'eventuale limite uniforme di f_n deve necessariamente essere $f(x) \equiv 0$. In altri termini

$$\text{SE } f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \implies f \equiv 0$$

E QUINDI f_n HA LIMITE UNIFORME $\iff \|f_n\|_\infty \to 0$

- Per lo studio fatto sopra

$$\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{n^{\alpha-3}}{4}.$$

Questo tende a zero se e solo se $\alpha < 3$.

DUNQUE

f_n HA LIMITE UNIF. $\Longleftrightarrow$ $\alpha < 3$ (e in tal caso il limite è zero)

- Passiamo alla serie e studiamo la convergenza totale su $[0, +\infty[$. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{1}{4} \sum n^{\alpha-3} < +\infty \Longleftrightarrow \alpha - 3 < -1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\alpha < 2}$$

NE SEGUE CHE la serie converge totalmente $\Longleftrightarrow \alpha < 2$ e quindi per $\alpha < 2$ converge uniformemente.

- Vediamo ora la convergenza uniforme su $[0,1]$.

Dallo studio di funzione si vede subito che il $\max\limits_{0 \le x \le 1} f_n(x) = f_n(1)$

$= \dfrac{n^\alpha}{3n^4+1}$. Dato che $\dfrac{n^\alpha}{3n^4+1} \simeq \dfrac{1}{3n^{4-\alpha}}$

si ha la convergenza totale su $[0,1]$ se e solo se $4 - \alpha > 1$

cioè se $3 > \alpha$. Dato che $2 < 3$ la serie

converge totalmente e quindi uniformemente

- MOSTRIAMO INFINE CHE $\alpha \geq 2$ la serie non converge unif. su $[0,+\infty[$

È chiaro che basta considerare $\alpha = 2$ ($\alpha > 2$ è peggio). Se fosse

$$S(x) \underset{\text{UNIF}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{allora} \quad \lim_{x \to +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim f_n(x) = 0$$

Prendiamo $x = m$ intero; allora (essendo $f_n \geq 0 \quad \forall n$)

$$S(m) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(m) \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{n^2 m}{3n^4 + m^4} \geq \frac{1}{m^3} \sum_{n=1}^{m} \frac{n^2}{3\left(\frac{n}{m}\right)^4 + 1} \geq$$

$$\frac{1}{m^3} \sum_{n=1}^{m} \frac{n^2}{3+1} = \frac{1}{4} \frac{1}{m^3} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \xrightarrow{m \to +\infty} \frac{1}{24} > 0$$

e quindi è impossibile che $S(m) \to 0$ per $m \to +\infty$.

ALTRO MODO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{3n^4 + x^4} = \int_1^{+\infty} \frac{[y]^2 x}{3[y]^4 + x^4} \, dy \geq \int_1^{+\infty} \frac{(y-1)^2 x}{3y^4 + x^4} \, dy$$

$$(y = tx \Rightarrow dy = x\, dt) = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{(tx-1)^2 x}{3t^4x^4 + x^4} \, x\, dt =$$

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{(t - 1/x)^2}{3t^4 + 1} \, dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{3t^4+1} \, dt > 0$$

(seguendo questa tecnica si potrebbe calcolare esattamente il limite)

DI NUOVO $\lim_{x \to +\infty} S(x) > 0$ CONTRASTA CON LA CONV. UNIF. DELLA SERIE

B2 Prendiamo nuovamente $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{3n^4 + x^4}$

Calcoliamo la norma L^1 di f_n (su $[0, +\infty[$)

$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} \dfrac{n^\alpha x}{3n^4 + x^4}\, dx =$ (pongo $x = ny$, $dx = n\,dy$)

$\int_0^{+\infty} \dfrac{n^\alpha n y}{3n^4 + n^4 y^4}\, n\, dy = \dfrac{n^{\alpha+2}}{n^4} \int_0^{+\infty} \dfrac{y}{3 + y^4}\, dy = n^{\alpha-2} \cdot \text{costante}$

Da questo si ricava intanto che per avere la convergenza in L^1 della serie

$\sum f_n$ è necessario $\alpha - 2 < 0 \iff \alpha < 2$ (deve essere $\|f_n\|_1 \to 0$)

Vediamo la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1$; per questo si vuole

$\alpha - 2 < -1 \iff \alpha < 1$. Dunque per $\underline{\alpha < 1}$ la serie

converge in L^1. Vediamo che per $\alpha \geq 1$ non converge.

Infatti se esistesse una somma $S(x)$ tale che $S(x) \underset{L^1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

allora si avrebbe $\int_0^{+\infty} S(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$. Ma

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{c}{n^{2-\alpha}}$$ (come abbiamo appena visto – NOTA che essendo $\underline{\underline{f_n \geq 0}}$ la norma di f_n coincide con l'integrale di f_n)

e allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) = +\infty$ se $\alpha \geq 2$, dunque c'è un assurdo.

In definitiva la convergenza L^1 si realizza $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\alpha < 1}$

- Per il secondo punto calcoliamo la norma $L^2([0,+\infty[)$ di f_n:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} f_n^2(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{n^{2\alpha} x^2}{(3n^4+x^4)^2}\,dx = \quad (x = ny)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^{2\alpha} n^2 y^2 \, n\,dy}{(3n^4+n^4y^4)^2} = \frac{n^{2\alpha+3}}{n^8} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(3+y^4)^2}\,dy = n^{2\alpha-5}\,\text{Cost.}$$

$$\Rightarrow \quad \|f_n\|_2 = n^{\alpha-\frac{5}{2}}$$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty \Longleftrightarrow \alpha - \frac{5}{2} < -1 \Longleftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$.

In particolare la cosa vale per $\alpha = 1$ e quindi in questo caso la serie converge in $L^2([0,+\infty[)$

A2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{x^4+2x^2+1}\, dx$

Possiamo e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^4+2x^2+1)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)^2} = \circledast$

Il denominatore ha tre radici ; $x=0$ (semplice) $x=\pm i$ (doppie).

Per quanto visto nel corso (posto $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$

$\circledast = \pi i \operatorname{Res}(f, 0) + 2\pi i (f, i)$. SI HA

- $\operatorname{Res}(f,0) = \left.\dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right|_{z=0} = 1$

- $\operatorname{Res}(f, i) = \left.\dfrac{d}{dz} \dfrac{e^{iz}}{z(z+i)^2}\right|_{z=i} = \left.\left(\dfrac{i e^{iz}}{z(z+i)^2} - \dfrac{e^{iz}}{z^2(z+i)^2} - 2\dfrac{e^{iz}}{z(z+i)^3} \right)\right|_{z=i}$

$= \dfrac{i e^{-1}}{-4i} - \dfrac{e^{-1}}{4} - \dfrac{2e^{-1}}{i(-8i)} = \left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\right) e^{-1} = -\dfrac{3}{4} e^{-1}$

Dunque

$$\circledast = i\pi - 2i\pi \cdot \frac{3}{4} e^{-1} = i\pi\left(1 - \frac{3}{2} e^{-1}\right) = i\pi\left(\frac{2e-3}{2e}\right)$$

da cui
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{dx}{(x^4+2x+1)} = \operatorname{Im}(\circledast) = \pi \, \frac{2e-3}{2e}$$

e infine l'integrale di partenza (che è solo su $[0, +\infty]$) vale

$$\boxed{\pi \, \frac{2e-3}{4e}}$$

(B.1) $\quad y'' + 2y' + y = e^{-|t|}$

Se $b(t) = e^{-|t|} \Rightarrow \hat{b}(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2+1}$ (NOTO)

Allora trasformando l'equazione

$$(-\omega^2 + 2i\omega + 1)\,\hat{y} = \hat{b} \iff \hat{y}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1}\,\frac{1}{-\omega^2+2i\omega+1}$$

Dato che $-\omega^2 + 2i\omega + 1 = 0 \iff \omega = i$ (radice doppia), si ha

$(-(\omega-i)^2 = -(\omega^2 - 2i\omega - 1))$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-2}{(\omega-i)^3(\omega+i)}.$$

Posto $g(\omega) = \dfrac{-2e^{i\omega t}}{(\omega-i)^3(\omega+i)}$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} i\,\mathrm{Res}(g(\omega), i) & \text{se } t>0 \\ -i\,\mathrm{Res}(g(\omega), -i) & \text{se } t<0. \end{cases}$$

CALCOLIAMO I RESIDUI

- $\mathrm{Res}(g(\omega), i) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{d\omega^2}\left(\dfrac{-2e^{i\omega t}}{\omega+i}\right)\Bigg|_{\omega=i} =$

$$-\frac{d^2}{d\omega^2}\left(e^{i\omega t}(\omega+i)^{-1}\right)\Big|_{\omega=i} = -\frac{d}{d\omega}\left(it\,e^{i\omega t}(\omega+i)^{-1} - e^{i\omega t}(\omega+i)^{-2}\right)\Big|_{\omega=i} =$$

$$-\left(-t^2 e^{i\omega t}(\omega+i)^{-1} - it\,e^{i\omega t}(\omega+i)^{-2} - it\,e^{i\omega t}(\omega+i)^{-2} + 2e^{i\omega t}(\omega+i)^{-3}\right)\Big|_{\omega=i}$$

$$= -\left(\frac{-t^2 e^{-t}}{2i} - \frac{2it\,e^{-t}}{(2i)^2} + \frac{2\,e^{-t}}{(2i)^3}\right) = -\left(\frac{i}{2}t^2 + \frac{it}{2} + \frac{i}{4}\right)e^{-t}$$

$$-\frac{i}{4}\left(2t^2 + 2t + 1\right)e^{-t}$$

- $\mathrm{Res}\,(g(\omega), -i) = \left[\frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega-i)^3}\right]_{\omega=-i} = \frac{-2e^{t}}{(-2i)^3} = \frac{i}{4}e^{t}$

$$\frac{-2}{-8(i)} = \frac{1}{4(i)} = \frac{i}{4}$$

DUNQUE

$$y(t) = \begin{cases} \frac{2t^2+2t+1}{4}\, e^{-t} & \text{se } t>0 \\ \frac{e^{t}}{4} & \text{se } t<0 \end{cases} = \frac{e^{-|t|}}{4}\left(1 + 2H(t)(t^2+t)\right)$$

(C.1)

$$y'' + 2y' + y = H(t)\cos(x)$$ Applico Laplace

$$(z^2 + 2z + 1)\check{y} = \frac{2z}{z^2+1}$$

RADICI $\pm i$ e -1 (doppia)

$$\check{y} = \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)} \quad ; \text{ Posto } g(z) := \frac{z e^{tz}}{(z+1)^2(z^2+1)}$$

$$\mathrm{Res}(g, i) = \left.\frac{z e^{tz}}{(z+1)^2(z+i)}\right|_{z=i} = \frac{i e^{it}}{(1+i)^2 2i} = \frac{1}{4i} e^{it}$$

$$\mathrm{Res}(g, -i) = \overline{\mathrm{Res}(g, i)} = -\frac{1}{4i} e^{-it}$$

$$\mathrm{Res}(g, -1) = \frac{d}{dz} \left.\frac{z e^{tz}}{z^2+1}\right|_{z=-1} = \left.\left(\frac{e^{tz}}{z^2+1} + \frac{tze^{tz}}{z^2+1} - \frac{2z}{(z^2+1)^2} z e^{tz}\right)\right|_{z=-1} =$$

$$e^{-t}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2} - \frac{2}{4}\right) = -\frac{t}{2} e^{-t}$$

ALLORA $y(t) = \sum$ residui $= \frac{1}{4i} e^{it} - \frac{1}{4i} e^{-it} - \frac{t}{2} e^{-t} = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{t}{2} e^{-t}$ per $t>0$

e quindi $\boxed{y(t) = \frac{1}{2} H(t)\left(\sin(t) - t e^{-t}\right)}$

c.2 Dimostrare che $u = \delta''$ verifica

$$t^2 u(t) = 2\delta$$

<u>Dim</u>

<u>Modo 1</u> uso la definizione

$$\langle t^2 \delta'', \varphi \rangle = \langle \delta'', t^2 \varphi(t) \rangle = -\langle \delta', \frac{d}{dt} t^2 \varphi(t) \rangle$$

$$= \langle \delta, \frac{d^2}{dt^2} t^2 \varphi(t) \rangle = \langle \delta, \frac{d}{dt}\left(2t\varphi(t) + t^2 \varphi'(t)\right) \rangle =$$

$$\langle \delta, 2\varphi(t) + 4t\varphi'(t) + t^2 \varphi'(t) \rangle =$$

$$2\varphi(t) + 4t\varphi'(t) + t^2\varphi'(t) \Big|_{t=0} = 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi \rangle$$

<u>Modo 2</u> usando la derivata del prodotto

$$(t^2\delta)'' = (2t\,\delta + t^2\delta')' = 2\delta + 4t\delta' + t^2\delta''$$

e dato che $t^2\delta = 0$ ottengo $t^2\delta'' = -2\delta - 4t\delta'$

Analogamente (questo peraltro è stato fatto a lezione)

$$0 = (t\delta)' = \delta + t\delta' \Rightarrow t\delta' = -\delta \Rightarrow t^2\delta'' = -2\delta + 4\delta = 2\delta$$

C3

$$y'' + 2y' + y = \delta' \qquad \text{Applico Fourier (in } \mathcal{S}'\text{)}$$
$y \in \mathcal{S}'$

$$(-\omega^2 + 2i\omega + 1)\,\hat{y} = i\omega$$

$$\hat{y} = \frac{1}{-\omega^2+2i\omega+1} = \frac{-i\omega}{(\omega-i)^2} \qquad \left(\text{NOTA CHE } -\omega^2+2i\omega+1 \neq 0 \text{ se } \omega \in \mathbb{R}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{-i\omega e^{i\omega t}}{(\omega-i)^2}, i\right) = -i\frac{d}{d\omega}\left(\omega e^{i\omega t}\right)\Big|_{\omega=i} =$$

$$-i\left(e^{i\omega t} + \omega \cdot it\, e^{i\omega t}\right)_{\omega=i} = -i\left(e^{-t} + i^2 t e^{-t}\right) = -i(1-t)e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \begin{cases} i \operatorname{Res}(-, i) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = \boxed{H(t)(1-t)e^{-t}}$$

VERIFICA (per fare qualche calcolo nelle distribuzioni)

$$y(t) = H(t)(1-t)e^{-t};$$

$$y' = \delta(1-t)e^{-t} + H(t)\left(-e^{-t} - (1-t)e^{-t}\right) = \delta + H(t)(t-2)e^{-t}$$

$$y'' = \delta' + \delta(t-2)e^{-t} + H(t)(1-t+2)e^{-t} = \delta' - 2\delta + H(t)(3-t)e^{-t}$$

$$y'' + 2y' + y = \delta' - \cancel{2\delta} + H(t)(3-t)e^{-t} + \cancel{2\delta} + H(t)(2t-4)e^{-t}$$
$$+ H(t)(1-t)e^{-t} = \delta' + H(t)(3-4+1-t+2t-t)e^{-t} = \delta'$$

OK.

(*) L'ultimo punto del problema c.2 si può fare così (e se lo si fa, in realtà, si fa anche la prima parte)

$$t^2 u = 2\delta \iff \mathcal{F}(t^2 u) = \mathcal{F}(2\delta) \iff -\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{u} = 2 \iff$$

$$-\hat{u}(\omega) = \omega^2 + a\omega + b \quad \text{con } a, b \text{ arbitrarie} \iff$$

$$\hat{u}(\omega) = -\omega^2 + a\omega + b \quad a, b \text{ arbitrarie} \iff$$

$$u = \delta'' + a\delta' + b\delta \quad a, b \text{ arbitrarie}$$