Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 11 giugno 2009

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Sia α un parametro reale e si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definite da $f_n(x) := \dfrac{n^\alpha x}{3n^4 + x^4}$.

1. Si dica per quali valori di α la successione (f_n) converge uniformemente su $[0, +\infty[$;
2. Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[0, +\infty[$.
3. Si dica se per $\alpha = 2$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0, 1]$.
4. $(\star)$ Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$. Può essere utile a tal fine ricordare la formula $\sum_{j=1}^{k} j^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^4 + 2x^2 + 1)}\, dx.$$

(b.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases} .$$

(b.2) Dati il parametro reale α e la successione di funzioni del punto (a.1)

1. si trovino i valori di α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0, +\infty[)$;
2. si dica se, per $\alpha = 1$, la la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^2([0, +\infty[)$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si trovi la soluzione del problema:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = H(t)\cos(t) \\ y(t) = 0 \text{ per } t < 0. \end{cases}$$

(c.2) Si dimostri che la distribuzione $u = \delta''$ verifica:

$$t^2 u = 2\delta$$

$(\star)$ Quali sono tutte le distribuzioni u che verificano l'equazione scritta sopra?

(c.3) Si trovino tutte le soluzioni del problema:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}'. \end{cases}$$