Complementi di Matematica 20/07/2009

(1) $$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{2n^3 + x^3}$$

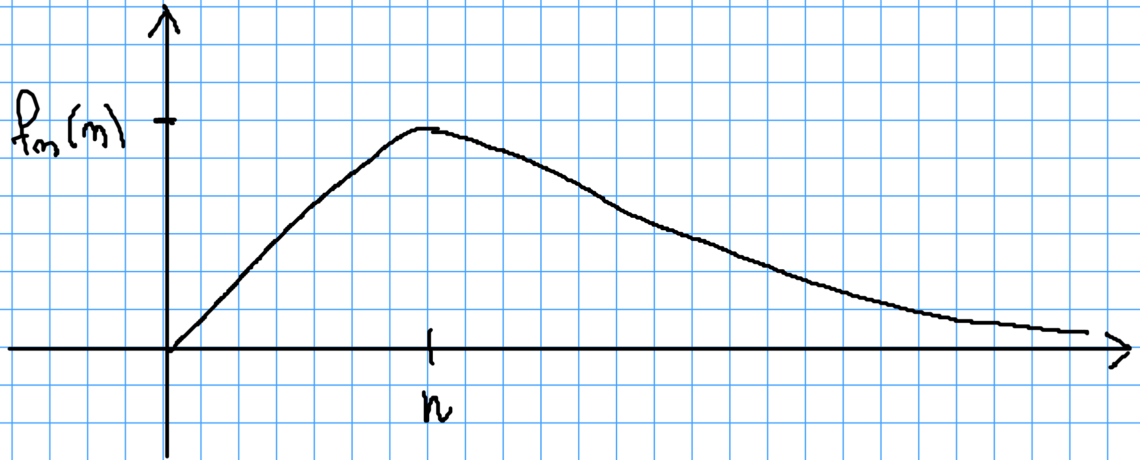
– Vediamo la convergenza puntuale. Se $x \geq 0$ è fissato

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{2n^3+x^3} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ x/2 & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 3 \end{cases}$$

– Consideriamo la conv. uniforme su $[0,+\infty[$. Per il punto precedente se $f_n \to f$ unif, allora $\alpha \leq 3$ e $f(x) = 0$ se $\alpha < 3$, $f(x) = \frac{x}{2}$ se $\alpha = 3$. Ma questa ultima possibilità non si può presentare perché, se $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ unif e se $f_n(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$ allora deve essere $f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$ (che è falso per $f(x) = \frac{x}{2}$). Dunque se $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$, allora $\alpha < 3$ e $f(x) = 0$. Per vedere se tale convergenza si realizza effettivamente valutiamo $\|f_n\|_\infty$ (su $[0,+\infty[$). Si ha:

$f_n(0) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, $f_n'(x) = \frac{2n^3+x^3-3x^2 x}{(2n^3+x^3)^2} n^\alpha = \frac{2(n^3-x^3)}{(2n^3+x^3)^2} n^\alpha$

per cui $f_n'(x) = 0 \iff x = n$ e $f_n(n) = \frac{n^{\alpha-2}}{3}$.



$$\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \frac{n^{\alpha-2}}{3}$$

Dunque f_n conv. unif $\Longleftrightarrow$ $\|f_n\|_\infty \to 0 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha < 2}$

- Vediamo la conv. totale della serie $\sum_n f_n$, cioè la conv. della serie $\sum_n \|f_n\|_\infty = \frac{1}{3} \sum_n \frac{1}{n^{2-\alpha}}$. Quest'ultima è una serie armonica che converge se e solo se $2-\alpha > 1 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha < 1}$
- Passiamo alla conv. unif. di $\sum_n f_n$ su $[0,1]$ nel caso $\alpha = 1$. Anche in questo caso verifichiamo la conv. totale, notando che $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = f_n(1) = \frac{n^\alpha}{2n^3+1} = \frac{n}{2n^3+1} \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$. Dato che $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$ la serie converge totalmente e quindi uniformemente su $[0,1]$.
- Torniamo a $[0,+\infty[$ e verifichiamo che per $\alpha \geq 1$ la serie <u>non</u> converge unif.

Per questo poniamo $S(x) = \sum_n f_n(x)$ e mostriamo che

non è vero che $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$ (questo contrasta con la conv. unif.)

Se K è un intero si ha (se $\alpha \geq 1$)

$$S(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha K}{2n^3+K^3} \geq \sum_{n=1}^{K} \frac{n^\alpha K}{2n^3+K^3} \geq \sum_{n=1}^{K} \frac{n^\alpha K}{2K^3+K^3} = \frac{1}{3K^2}\sum_{n=1}^{K} n^\alpha$$

$$\geq \frac{1}{3K^2}\sum_{n=1}^{K} n = \frac{1}{3}\frac{1}{K^2}\frac{K(K+1)}{2} \longrightarrow \frac{1}{6} \quad \text{per } K\to+\infty$$

per cui non è possibile $S(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ #

(4) Calcoliamo $\|f_n\|_1$ (su $[0,+\infty[$), cioè

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \int_0^{+\infty} \frac{n^\alpha x}{2n^3+x^3}dx = (x=ny) = \int_0^{+\infty}\frac{n^\alpha n y}{2n^3+n^3y^3}\, n\,dy =$$

$$\frac{n^{\alpha+2}}{n^3}\int_0^{+\infty}\frac{y}{2+y^3}dy = \frac{c}{n^{1-\alpha}}.$$ Dato che $\sum_n \frac{1}{n^{1-\alpha}} < +\infty$ se $\alpha < 0$

ne deduciamo che per $\boxed{\alpha < 0}$ la serie converge in $L^1([0,+\infty[)$

Viceverso se $\alpha \geq 0$ la serie non può convergere perché se lo facesse

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_n f_n(x)\right)dx = \sum_n \int^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_n \frac{c}{n^{1-\alpha}} = +\infty \quad (\text{noto che } f_n \geq 0)$$

- Prendiamo $\alpha = 2$ e calcoliamo $\|f_n\|_2^2$ su $[0,1]$ cioè

$$\int_0^1 f_n^2(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{n^2 x}{2n^3 + x^3}\right)^2 dx = (x = ny) = \int_0^{1/n} \left(\frac{n^3 y}{2n^3 + n^3 y}\right)^2 n\,dy =$$

$$n \int_0^{1/n} \frac{y^2}{(2+y^3)^2}\,dy \leq \frac{n}{4} \int_0^{1/n} y^2\,dy = \frac{n}{4} \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{1/n} = \frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$$

Quindi $\|f_n\|_2 \simeq \text{cost}\,\frac{1}{n}$

PURTROPPO la serie $\sum \|f_n\|_2 = +\infty$ e questo fa supporre che la serie $\sum f_n$ non converga in L^2, ma NON lo dimostra.

C'è stato errore di valutazione nel formulare l'esercizio per cui è più difficile di quanto previsto – la correzione terrà conto di questo fatto (se fosse stato $\alpha = 1$, allora si sarebbe concluso che la serie converge).

(SOLO PER I PIÙ CURIOSI ...)

Vediamo per completezza come si fa a vedere che $\sum\limits^{\infty} f_n$ non converge in $L^2([0,1])$. Poniamo $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} f_n(x)$ e supponiamo che $\sum\limits_{n=1}^{k} f_n \xrightarrow{L^2} S$ per $k \to +\infty$; questo vuol dire che $\left\| \sum_{n=1}^{K} f_n - S \right\|_2^2 \to 0$ e cioè che:

$$\left\| \sum_{n=1}^{K} f_n - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_2^2 \to 0 \iff \left\| \sum_{n=K+1}^{\infty} f_n \right\|_2^2 \to 0 \iff$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=K+1}^{\infty} f_n(x) \right)^2 dx \to 0 \iff \int_0^1 \left(\sum_{n,m=K+1}^{\infty} f_n(x)\, f_m(x) \right) dx \to 0$$

$$\iff \int_0^1 \sum_{n,m=K+1}^{\infty} \left(\frac{n^2 m^2 x^2}{(2n^3+x^3)(2m^3+x^3)} \right) dx \longrightarrow 0$$

Notiamo ora che

$$\int_0^1 \sum_{n,m=K+1}^{\infty} \frac{n^2 m^2 x^2}{(2n^3+x^3)(2m^3+x^3)} dx \geq \sum_{n,m=K+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{n^2 m^2 x^2}{(2n^3+x^3)(2m^3+x^3)} dx =$$

$$\sum_{n,m=K+1}^{\infty} \frac{n^2 m^2}{n^3 m^3} \int_0^1 \frac{x^2}{\left(2+\left(\frac{x}{n}\right)^3\right)\left(2+\left(\frac{x}{m}\right)^3\right)} dx \geq \sum_{n,m=K+1}^{\infty} \frac{1}{n\, m} \int_0^1 \frac{x^2}{3 \cdot 3} dx$$

$$\geq \frac{1}{27} \sum_{n,m=K+1}^{\infty} \frac{1}{n\, m} \geq \frac{1}{27} \frac{1}{K+1} \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad ; \text{ quindi non può } \to 0$$

$$(2) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4+4x^2+4}\,dx = (a)$$

Poniamo $\qquad (b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4+4x^2+4}\,dx$

Notiamo che $\qquad x^4+4x^2+4 = (x^2+2)^2 = (x+\sqrt{2}i)^2(x-\sqrt{2}i)^2$

e quindi $\pm\sqrt{2}i$ sono due poli doppi. Per la teoria

$$(b) = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{ix}}{x^4+4x^2+4}, \sqrt{2}i\right) = 2\pi i \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+\sqrt{2}i)^2}\Bigg|_{z=\sqrt{2}i} =$$

$$2\pi i \frac{i e^{iz}(z+\sqrt{2}i)^2 - e^{iz}\,2(z+\sqrt{2}i)}{(z+\sqrt{2}i)^4}\Bigg|_{z=\sqrt{2}i} = 2\pi i \frac{i(2\sqrt{2}i)^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}i}{(2\sqrt{2}i)^4} e^{-\sqrt{2}} =$$

$$2\pi i \frac{-8i - 4\sqrt{2}i}{64} e^{-\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}(2+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}.$$

Dato che l'integrando in (a) è pari si ha

$$(a) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(b) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{8}(2+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} = \boxed{\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{16\,e^{\sqrt{2}}}}$$

(b.1)

$$\begin{cases} y'' - 9y = e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Applico la trasf. di Fourier. Intanto $\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$ e quindi

$$(-\omega^2 - 9)\,\hat{y}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1} \iff \hat{y}(\omega) = \frac{-2}{(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

Antitrasformando con i residui (le radici sono $\pm i$ e $\pm 3i$, semplici)

$$y(t) = \begin{cases} i\,\mathrm{Res}(g(z), i) + i\,\mathrm{Res}(g(z), 3i) & \text{se } t > 0 \\ -i\,\mathrm{Res}(g(z) -i) + i\,\mathrm{Res}(g(z), -3i) & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

dove $g(z) = \dfrac{-2e^{zt}}{(1+z^2)(9+z^2)}$. Si ha: (uso la formula $\mathrm{Res}\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right) = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$)

$$\mathrm{Res}(g(z), i) = \left.\frac{-2e^{zt}}{2z(9+z^2) + 2z(1+z^2)}\right|_{z=i} = \frac{-2e^{-t}}{2i(9-1)} = -\frac{e^{-t}}{8i}$$

$$\mathrm{Res}\left(g(z),3i\right)=\left.\frac{-2e^{zt}}{2z(9+z^2)+2z(1+z^2)}\right|_{z=3i}=\frac{-2e^{-3t}}{6i(1-9)}=\frac{e^{-3t}}{24i}$$

$$\mathrm{Res}\left(g(z),-i\right)=\left.\frac{-2e^{zt}}{2z(9+z^2)+2z(1+z^2)}\right|_{z=-i}=\frac{-2e^{t}}{-2i(9-1)}=\frac{e^{-3t}}{8i}$$

$$\mathrm{Res}\left(g(z),-3i\right)=\left.\frac{-2e^{zt}}{2z(9+z^2)+2z(1+z^2)}\right|_{z=3i}=\frac{-2e^{-3t}}{-6i(1-9)}=-\frac{e^{-3t}}{24i}$$

e quindi

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-3t}-3e^{-t}}{24} & \text{se } t>0\\[2ex] \dfrac{e^{3t}-3e^{t}}{24} & \text{se } t<0\end{cases}=\frac{e^{-3|t|}-3e^{-|t|}}{24}$$

Si sarebbe anche potuto osservare che la soluzione deve essere pari dato che il termine noto è pari e nell'equazione compaiono solo derivate di ordine pari (la 2^a e la 0-esima). Dunque sarebbe bastato trovare $y(t)$ per $t>0$ e farne l'estensione pari.

(C.1) $\begin{cases} y'' + y = H(t)\cos(t) \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t<0 \end{cases}$

Usiamo Laplace, ricordando che $\mathcal{L}(H(t)\cos(t)) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

Allora se $\check{y}(z) = \mathcal{L}(y)$ si ha

$$(z^2+1)\,\check{y}(z) = \frac{z}{z^2+1} \iff \check{y}(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$$

Poniamo $g(z) = \dfrac{z e^{zt}}{(z^2+1)^2}$; $g(z)$ ha due poli doppi in $\pm i$

e per le formule note

$$y(t) = \begin{cases} \operatorname{Res}(g(z), i) + \operatorname{Res}(g(z), -i) & \text{se } t>0 \\ 0 & \text{se } t<0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}(g(z), i) = \frac{d}{dz}\frac{z e^{zt}}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = \frac{\left(e^{zt} + tz e^{zt}\right)(z+i)^2 - 2(z+i)\,z e^{zt}}{(z+i)^4}\Big|_{z=i} =$$

$$\frac{e^{it}}{(2i)^4}\left[(1+it)(2i)^2-2\cdot 2i\cdot i\right]=\frac{e^{it}}{16}\left[-4(1+it)+4\right]=\frac{-it\,e^{it}}{4}$$

$$\mathrm{Res}(g(z),-i)=\overline{\mathrm{Res}(g(z),i)}=\frac{it\,e^{-it}}{4}$$ e dunque se $t>0$

$$y(t)=\frac{t}{4}\left(-i\,e^{it}+i\,e^{-it}\right)=\frac{t}{2}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{t\sin(t)}{2}$$

In definitiva $\quad y(t)=\dfrac{H(t)\,t\sin(t)}{2}$

Ricavando dall'equazione:

$$y''(t)=H(t)\cos(t)-y(t)=H(t)\left(\cos(t)-\frac{t}{2}\sin(t)\right)$$, da cui

$$y'''(t)=\delta\left(\cos(t)-\frac{t}{2}\sin(t)\right)+H(t)\left(-\sin(t)-\frac{1}{2}\sin(t)-\frac{t}{2}\cos(t)\right)=$$
$$\delta+H(t)\left(-\frac{3}{2}\sin(t)-\frac{t}{2}\cos(t)\right)$$
$$y^{IV}(t)=\delta'+\delta\left(-\frac{3}{2}\sin(t)-\frac{t}{2}\cos(t)\right)+H(t)\left(-\frac{3}{2}\cos(t)-\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{t}{2}\sin(t)\right)$$
$$=\delta'-H(t)\left(2\cos(t)-\frac{t}{2}\sin(t)\right)$$

(c.2) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$ Usiamo Fourier

$$\left(-\omega^2 - 2i\omega + 2\right)\hat{y}(\omega) = i\omega$$

$$\Longleftrightarrow \quad \hat{y}(\omega) = \frac{-i\omega}{\omega^2 + 2i\omega - 2}$$

$\in L^2(\mathbb{R})$ dato che non ha radici reali e all'infinito $\simeq \frac{1}{\omega}$

Le radici di $\omega^2 + 2i\omega - 2 = 0$ sono $\omega_{12} = -i \pm \sqrt{-1+2} = -i \pm i$

Per antitrasformare (dato che $\hat{y} \in L^2$) possiamo usare i residui di $g(z) = \dfrac{-iz\, e^{izt}}{z^2 + 2iz - 2}$

$$\mathrm{Res}(g, -i+1) = \left.\frac{-iz\, e^{izt}}{2z + 2i}\right|_{z=1-i} = \frac{-i(1-i)\, e^{(i+1)t}}{2} = \frac{-(1+i)\, e^{(1+i)t}}{2}$$

$$\mathrm{Res}(g, -i-1) = \left.\frac{-iz\, e^{izt}}{2z + 2i}\right|_{z=-1-i} = \frac{i(1+i)\, e^{(-i+1)t}}{-2} = \frac{(1-i)\, e^{(-i+1)t}}{2}$$

Dato che entrambe le radici hanno parte immaginaria negativa $y(t) = 0$ se $t > 0$ mentre per $t < 0$ $y(t)$ si ottiene sommando i due residui (per $-i$), cioè

$$y(t) = -\frac{i}{2} e^{t} \left(-(1+i) e^{it} + (1-i) e^{-it} \right) =$$

$$= \frac{e^{t}}{2} \left((-1+i) e^{it} + (-1-i) e^{-it} \right) = e^{t} \operatorname{Re}\left((-1+i) e^{it} \right) =$$

$$= e^{t} \left(-\cos(t) - \sin(t) \right)$$

Quindi $y(t) = -H(-t)\, e^{t} (\cos(t) + \sin(t))$. Verifichiamo:

$$y'(t) = \delta(-t)\, e^{t} (\cos(t) + \sin(t)) - H(-t) e^{t} (\cos(t) + \sin(t)) - H(-t)\, e^{t} (-\sin(t) + \cos(t))$$

$$= \delta(t) - 2H(-t)\, e^{t} \cos(t)$$

$$y''(t) = \delta'(t) + 2\delta(-t)\, e^{t} \cos(t) - 2H(-t)\, e^{t} \cos(t) + 2H(-t)\, e^{t} \sin(t)$$

$$= \delta' + 2\delta + 2H(-t)\, e^{t} (\sin(t) - \cos(t))$$ DA CUI

$$y'' - 2y' + 2y = \delta' + 2\delta + 2H(-t)\, e^{t} (\sin(t) - \cos(t)) - 2\delta + 4H(-t) \cos(t)$$
$$- 2H(-t)(\sin(t) + \cos(t)) = \delta'$$