Complementi di Matematica 14/09/2009

(a.1) $f_n(x) = n^{\alpha} e^{-nx}$ su $[0, +\infty[$

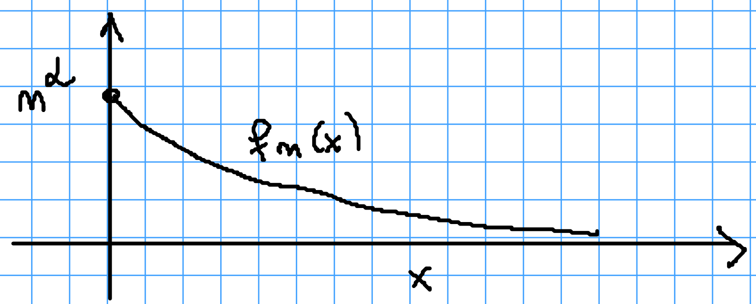
(1) Se consideriamo la convergenza puntuale troviamo

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} e^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \text{ oppure } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \text{ e } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \text{ e } \alpha > 0 \end{cases}$$

Dato che $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ implica f continua, per avere la conv. unif. su $[0, +\infty[$ è necessario $\underline{\alpha < 0}$ e allora f deve essere nulla.

Vediamo se per $\alpha < 0$ si ha effettivamente la convergenza uniforme.
Per questo calcoliamo $\| f_n \|_{\infty, [0, +\infty[}$ studiando il grafico di $f_n(x)$

- $f_n(0) = n^{\alpha}$
- $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$
- $f_n'(x) = n^{\alpha}(-n) e^{-nx} < 0 \quad \forall x \Rightarrow$ f decrescente



Dunque $\| f_n \|_{\infty, [0, +\infty[} = n^{\alpha}$

che tende a zero se $\alpha < 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{CONV. UNIF. } \forall \alpha < 0}$

(2) Avendo calcolato $\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = n^\alpha$ per la conv. totale bisogna vedere se $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha < +\infty$. Questo è vero $\iff$ $\boxed{\alpha < -1}$

(3) Se invece vogliamo $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ otteniamo facilmente (basta riguardare il grafico di f_n) che viene $f_n(1) = n^\alpha e^{-n}$

Data la forte decrescenza dell'esponenziale è noto che $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha e^{-n} < +\infty$ qualunque sia α. Dunque per $\alpha = 100$ la serie è totalmente convergente e in particolare è convergente.

(4) Mostriamo che, per $\alpha \geq -1$ la serie non converge uniformemente. Se lo facciamo ne segue che la convergenza uniforme della serie si ha SOLO PER $\alpha < -1$. Questo in effetti è molto facile (e non serve il suggerimento ...) dato che per $\alpha = 1$ la serie non converge puntualmente in $x=0$.

Infatti $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha = +\infty \text{ se } \alpha \geq -1$$

//

(a.2) Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 8x^2 + 16} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2+4)^2} dx = (*)$$

Per farlo usiamo i residui. I poli del denominatore sono $z = \pm 2i$, entrambi di molteplicità 2. Per le formule note

$$\circledast = 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(\frac{z\, e^{iz}}{(z^2+4)^2}, 2i \right) =$$

$$2\pi i \, \frac{d}{dz} \frac{z\, e^{iz}}{(z+2i)^2} \Bigg|_{z=2i} =$$

$$2\pi i \, \frac{\left(e^{iz} + iz\, e^{iz}\right)(z+2i)^2 - z e^{iz} \cdot 2(z+2i)}{(z+2i)^4} \Bigg|_{z=2i} =$$

$$2\pi i \, e^{-2} \, \frac{(1-2)(4i)^2 - 2i \cdot 2(4i)}{(4i)^4} =$$

$$\frac{2\pi i \, e^{-2}}{256} (16 + 16) = \frac{\pi}{4} e^{-2} i$$

Ne segue che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{(x^2+4)^2} \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PARITÀ}}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{(x^2+4)^2} \, dx = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, e^{ix}}{(x^2+4)^2} \, dx = \boxed{\frac{\pi}{8} e^{-2}}$$

(b.1)

$$\begin{cases} y'' - 4y' = t\, e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Usiamo la trasformata di Fourier. Innanzitutto trasformiamo $f(t) = t e^{-|t|}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} t\, e^{t} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} t\, e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{0} t\, e^{(1-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} t\, e^{-(1+i\omega)t}\, dt = \quad \text{(per parti)}$$

$$\left[t\, \frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1-i\omega} \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\, dt \; +$$

ZERO

$$- \left[t\, \frac{e^{-(1+i\omega)t}}{1+i\omega} \right]_{0}^{+\infty} + \frac{1}{1+i\omega} \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t}\, dt =$$

$$- \frac{1}{1-i\omega} \left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+i\omega} \left[\frac{e^{-(1+i\omega)}}{1+i\omega} \right]_{0}^{+\infty} = - \frac{1}{(1-i\omega)^2} + \frac{1}{(1+i\omega)^2} =$$

$$\frac{(1-i\omega)^2 - (1+i\omega)^2}{(\omega^2+1)^2} = \frac{-4i\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

Beninteso ci si poteva ricordare che, se $f_1(t) = e^{-|t|} \Rightarrow \hat{f}_1(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2+1}$

per cui $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(t f_1(t)) = i \dfrac{d}{d\omega} \hat{f}_1(\omega) = i \dfrac{-2 \cdot 2\omega}{(\omega^2+1)^2} = \dfrac{-4\omega i}{(\omega^2+1)^2}$

A questo punto trasformiamo l'equazione

$$-\omega^2 \hat{y}(\omega) - 4i\omega\, \hat{y}(\omega) = -\frac{4i\omega}{(\omega^2+1)^2} \iff$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{4i}{(\omega^2+1)^2(\omega+4i)}.$$

Poniamo $g(z) = \dfrac{4i\, e^{izt}}{(z^2+1)^2(z+4i)}$. Ci servono i residui di g nei suoi poli, che sono $\pm i$ (doppi) e $-4i$ (semplice).

- $\mathrm{Res}(g, i) = \dfrac{d}{dz} \dfrac{4i\, e^{izt}}{(z+i)^2(z+4i)}\Bigg|_{z=i} =$

$$4i\left[\frac{it\, e^{izt}}{(z+i)^2(z+4i)} - 2\frac{e^{izt}}{(z+i)^3(z+4i)} - \frac{e^{izt}}{(z+i)^2(z+4i)^2}\right]_{z=i} =$$

$$4i\, e^{-t}\left(\frac{it}{(2i)^2\, 5i} - \frac{2}{(2i)^3\, 5i} - \frac{1}{(2i)^2(5i)^2}\right) =$$

$$\frac{4i\, e^{-t}}{(2i)^2\, 5i}\left(it - \frac{2}{2i} - \frac{1}{5i}\right) = -\frac{e^{-t}}{5}\left(it + i + \frac{i}{5}\right) = \boxed{-\frac{i}{25}e^{-t}(5t+6)}$$

- $\mathrm{Res}(g,-i) = \dfrac{d}{dz} \dfrac{4i\, e^{izt}}{(z-i)^2(z+4i)}\Bigg|_{z=-i} =$

$$4i\left[\frac{it e^{izt}}{(z-i)^2(z+4i)} - 2\frac{e^{izt}}{(z-i)^3(z+4i)} - \frac{e^{izt}}{(z-i)^2(z+4i)^2}\right]_{z=-i} =$$

$$4i\, e^{t}\left(\frac{it}{(-2i)^2\, 3i} - \frac{2}{(-2i)^3\, 3i} - \frac{1}{(-2i)^2(3i)^2}\right) =$$

$$\frac{4i\, e^{t}}{(-2i)^2\, 3i}\left(it - \frac{2}{-2i} - \frac{1}{3i}\right) = -\frac{e^{t}}{3}\left(it - i + \frac{i}{3}\right) = \boxed{-\frac{i}{9}e^{t}(3t-2)}$$

- $\mathrm{Res}(g,-4i) = \dfrac{4i\, e^{izt}}{(z^2+1)^2}\Bigg|_{z=-4i} = \dfrac{4i\, e^{4t}}{(-16+1)^2} = \boxed{\dfrac{4}{225}\, i\, e^{4t}}$

Per le formule note

$$y(t) = \begin{cases} i\,\mathrm{Res}(g,i) = \dfrac{e^{-t}}{25}(5t+6) & \text{se } t \geq 0 \\[2ex] -i\left(\mathrm{Res}(g,-i) + \mathrm{Res}(g,-4i)\right) = -\dfrac{e^{t}}{9}(3t-2) + \dfrac{4}{225}e^{4t} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

(b.2) $f_n(x) = n^\alpha e^{-nx}$

(1) Convergenza in $L^1([0,+\infty[)$. Calcoliamo $\|f_n\|_1$ (in $[0,+\infty[$)

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} n^\alpha e^{-nx}\,dx = \left[n^\alpha \frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^{+\infty} = n^{\alpha-1}$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} < +\infty$ per $\alpha-1<-1 \iff \alpha<0$, allora la serie sicuramente converge per $\alpha<0$.

Mostriamo che la serie non converge per $\alpha \geq 0$. Se lo facesse ne seguirebbe $\int_0^{+\infty} \sum f_n(x)\,dx = \sum_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_0^{+\infty} n^\alpha = +\infty$

che sarebbe assurdo ($\sum f_n \notin L^1$).

Dunque la serie converge in $L^1 \iff \boxed{\alpha<0}$

(2) Convergenza in $L^2(0,1)$ se $\alpha = \frac{1}{4}$.

Calcoliamo la norma $L^2(0,1)$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n(x)^2\,dx = \int_0^1 n^{2\alpha} e^{-2nx}\,dx = n^{2\alpha}\left[\frac{e^{-2nx}}{-2n}\right]_0^1 = \frac{n^{2\alpha-1}}{2}\left(1-e^{-2n}\right)$$

e quindi

$$\|f_n\|_2 = n^{\alpha-\frac{1}{2}}\, c_n \qquad \text{dove} \quad c_n = \sqrt{\frac{1-e^{-2n}}{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che per $\alpha = \frac{1}{4}$ dà $\frac{c_n}{\sqrt{n}}$ PURTROPPO NON È SOMMABILE

(anche stavolta c'è stato un errore nello scrivere l'esercizio ...
Terrò conto di questo nella correzione —
per completezza vediamo come si arriva in fondo)

Cerchiamo di far vedere che la serie non converge in $L^2([0,1])$.
Dato che $[0,1]$ è limitato se la serie convergesse in $L^2([0,1])$ convergerebbe anche in $L^1([0,1])$ (Dis. di Schwartz) e allora (come nel punto (1)) $\int_0^1 \sum f_n = \sum \int_0^1 f_n$. Ma

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^{\frac{1}{4}} \int_0^1 e^{-nx}\,dx = n^{\frac{1}{4}} \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = n^{-\frac{3}{4}}\left(1-e^{-n}\right)$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}}\left(1-e^{-n}\right) = +\infty \Rightarrow$ ASSURDO (c.1) $\begin{cases} y'' - y = H(t)\cos(t) \\ y(t)=0 \quad \text{se } t<0 \end{cases}$ Usiamo Laplace

$$(z^2-1)\,\tilde{y}(z) = \frac{z}{z^2+1} \Rightarrow \tilde{y}(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)}$$

POLI: ± 1 $\pm i$. Se $g(z) := \dfrac{z e^{zt}}{(z^2-1)(z^2+1)}$

- $\displaystyle Res(g,1) = \left.\frac{z e^{zt}}{2z(z^2+1)+2z(z^2-1)}\right|_{z=1} = \boxed{\frac{e^t}{4}}$
- $\displaystyle Res(g,-1) = \left.\frac{z e^{zt}}{2z(z^2+1)+2z(z^2-1)}\right|_{z=-1} = \boxed{\frac{e^{-t}}{4}}$
- $\displaystyle Res(g,i) = \left.\frac{z e^{zt}}{2z(z^2+1)+2z(z^2-1)}\right|_{z=i} = \boxed{-\frac{e^{it}}{4}}$
- $\displaystyle Res(g,-i) = \overline{Res(g,i)} = \boxed{-\frac{e^{-it}}{4}}$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{H(t)}{2}\left[\cosh(t) - \cos(t)\right]$$

IN EFFETTI

$$y'(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\delta\left[\cosh(t) - \cos(t)\right]}_{=0} + \frac{H(t)}{2}\left[\sinh(t) + \sin(t)\right]$$

$$y''(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\delta\left[\sinh(t) + \sin(t)\right]}_{=0} + \frac{H(t)}{2}\left[\cosh(t) + \cos(t)\right]$$

(volendo si vede che $y'' - y = H(t)\cos(t)$).

$$y'''(t) = \frac{1}{2}\delta\left[\cosh(t) + \cos(t)\right] + \frac{H(t)}{2}\left[\sinh(t) - \sin(t)\right]$$

$$= \delta + \frac{H(t)}{2}\left[\sinh(t) - \sin(t)\right]$$

$$y^{(IV)}(t) = \delta' + \underbrace{\frac{1}{2}\delta\left[\sinh(t) - \sin(t)\right]}_{=0} + \frac{H(t)}{2}\left[\cosh(t) - \sin(t)\right] =$$

$$\delta' + \frac{H(t)}{2}\left[\cosh(t) - \sin(t)\right]$$

(C.2) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$

Applichiamo la trasformata di Fourier

$$(-\omega^2 + 2\omega i + 2)\,\hat{y} = i\omega$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{y} = \frac{i\omega}{-\omega^2 + 2\omega i + 2}$$

Δ questa funzione è L^2 (non L^1) perché non ha poli reali. Dunque la si può antitrasformare con i residui.

POLI: $\pm 1 + i$ — Se $g(z) = \dfrac{i z e^{izt}}{-z^2 + 2iz + 2}$, allora

$$\mathrm{Res}(g, 1+i) = \frac{i z e^{izt}}{-2z + 2i}\Bigg|_{z=1+i} = \frac{i(1+i)e^{i(1+i)t}}{-2 - 2i + 2i} = \boxed{-\frac{(i-1)e^{(i-1)t}}{2}}$$

$$\mathrm{Res}(g, -1+i) = \frac{i z e^{izt}}{-2z + 2i}\Bigg|_{z=-1+i} = \frac{i(-1+i)e^{i(-1+i)t}}{+2 - 2i + 2i} = \boxed{-\frac{(i+1)e^{-(i+1)t}}{2}}$$

Dato che le parti immaginarie sono ≥ 0

$$y(t) = \begin{cases} i\left(\mathrm{Res}(1+i) + \mathrm{Res}(1-i)\right) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} =$$

$$H(t)\left[(1+i)\frac{e^{(-1+i)t}}{2} + (1-i)\frac{e^{(-1-i)t}}{2} \right] = H(t)e^{-t}\mathrm{Re}\left[(1+i)e^{it}\right] =$$

$$\boxed{H(t)e^{-t}\left(\cos(t) - \sin(t)\right)}$$

Allora

$$y' = \delta\, e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)) - H(t)\,e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)) +$$
$$- H(t)e^{-t}(\sin(t) + \cos(t)) = \delta - 2H(t)e^{-t}\cos(t)$$

$$y'' = \delta' - 2\delta e^{-t}\cos(t) + 2H(t)e^{-t}\cos(t) + 2H(t)e^{-t}\sin(t) =$$
$$\delta' - 2\delta + 2H(t)e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$$

$$y'' + 2y' + 2y = \delta' - \cancel{2\delta} + 2H(t)e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) +$$
$$\cancel{2\delta} - 4H(t)e^{-t}\cos(t) +$$
$$2H(t)e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)) =$$
$$\delta' + H(t)e^{-t}\left(2\cancel{\cos(t)} + 2\cancel{\sin(t)} - 4\cancel{\cos(t)} + 2\cancel{\cos(t)} - 2\cancel{\sin(t)}\right)$$
$$= \delta'$$