Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta intermedia del 13 novembre 2009

1. Data la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) := \frac{e^{nx}}{n^2 + e^{2nx}}.$$

   (a) Si studino la convergenza puntuale e uniforme di (f_n) su $]-\infty, +\infty[$.

   (b) Si consideri

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

   e si dimostri che $F(x)$ è ben definita su tutto $]-\infty, +\infty[$ ed è continua eccetto che in $x = 0$.

   (c) (∗) Si provi che $\lim_{x \to 0^-} F(x) = F(0)$, cioè che F è continua da sinistra in zero.

2. Si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1}\, dx.$$

3. Si calcoli

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^3 + x^2 + x + 1)}\, dx.$$

4. (a) Si consideri l'equazione differenziale ai dati iniziali

$$\begin{cases} xy'' = y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   Si dica se tale equazione ammette una soluzione *analitica* y, cioè esprimibile come serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e in caso affermativo si trovi una formula che individua tale serie di potenze; si dica inoltre se l'eventuale soluzione è unica nell'ambito delle funzioni analitiche e se è definita su tutto $\mathbf{R}$.

   (∗) Se ci si riesce si scriva esplicitamente la serie di potenze.

   (b) Si considerino gli stessi quesiti nel caso dell'equazione differenziale:

$$\begin{cases} xy'' = y + \sin(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione

(1) a) $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{n^2 + e^{2nx}}$.

Convergenza puntuale. Fissato $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{n^2 + e^{2nx}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$ Infatti

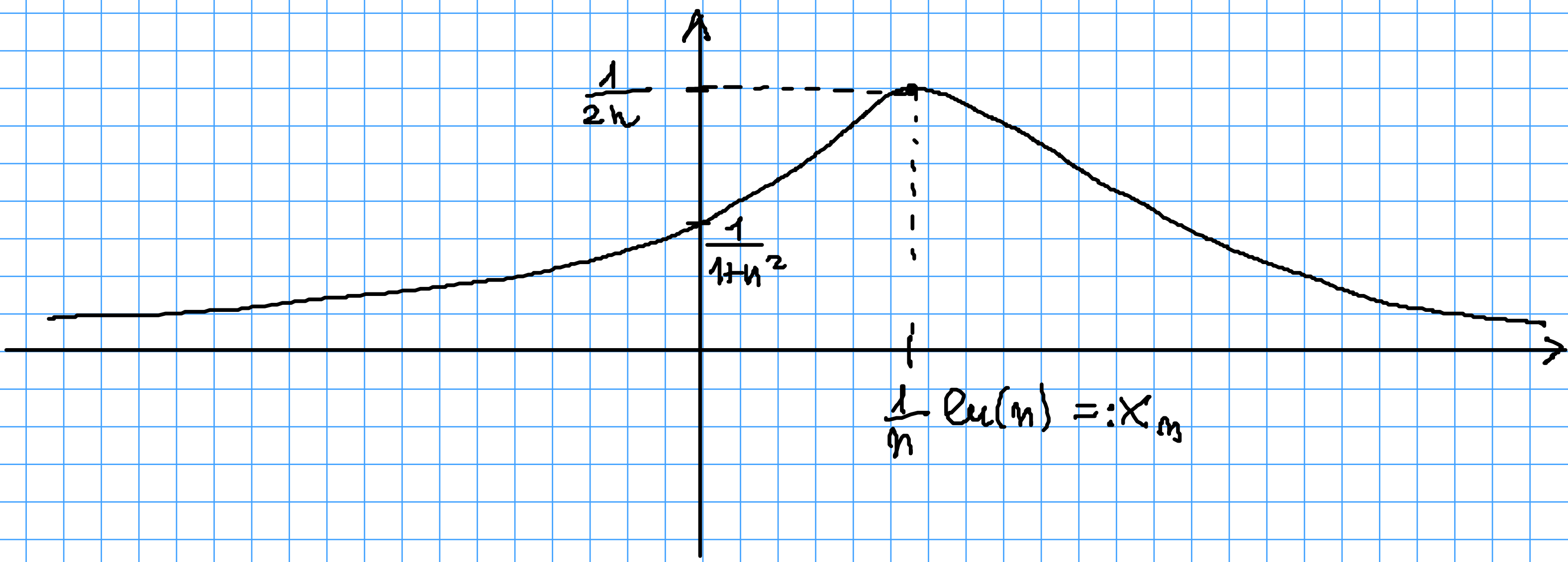
- se $x > 0$ posso scrivere $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx}} \dfrac{1}{\frac{n^2}{e^{2nx}} + 1} \to 0$
- se $x = 0$ posso scrivere $f_n(0) = \dfrac{1}{n^2+1} \longrightarrow 0$
- se $x < 0$ posso scrivere $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{n^2} \dfrac{1}{1 + \frac{e^{2nx}}{n^2}} \to 0$

Dunque $f_n \to 0$ puntualmente.
Come conseguenza se converge uniformemente deve convergere uniformemente a zero. Per discutere la conv. unif. studiamo f_n: $(n \geq 1)$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \dfrac{0}{n^2 + 0} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{e^{nx}} \dfrac{1}{\frac{n^2}{e^{nx}} + 1} = 0 \cdot \dfrac{1}{0+1} = 0$
- $f_n(0) = \dfrac{1}{n^2+1}$
- $f_n'(x) = \dfrac{n e^{nx}(n^2 + e^{2nx}) - e^{nx} \cdot 2n \cdot e^{2nx}}{(n^2 + e^{2nx})^2} =$

$$\frac{n e^{nx}}{(n^2 + e^{2nx})^2} (n^2 - e^{2nx}).$$

- $f_n'(x) = 0 \iff n^2 = e^{2nx} \iff e^{nx} = n \iff x = \underbrace{\frac{1}{n} \ln(n)}_{x_n}$



- $f(x_n) = \dfrac{n}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{2n}$

Ne segue che $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n} \to 0$ e f_n CONV. UNIFORMEMENTE (a zero)

b) È chiaro che la serie converge puntualmente per ogni x, dato che

- Se $x=0$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < +\infty$ (serie armonica con $\alpha = 2$)
- Se $x>0$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$ (serie geom. di ragione $\frac{1}{e^x}$)
- Se $x<0$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$ (serie geom. di r. e^x)

PERÒ se tento la conv. totale trovo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty \qquad \text{NON VA!}$$

Allora fisso $a>0$. Se calcolo

$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$ (per n grande, tale che $\frac{1}{n}\ln(n) < a$)

$$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{e^{na}}{n^2+e^{2na}} < +\infty$$

(n_0 essendo tale che $\frac{1}{n_0}\ln(n) < a$)

Se ne ricava che la serie conv. totalmente su $[a,+\infty[$ e quindi $F(x)$ è continua su $[a,+\infty[$ $\forall a>0$. Dunque F è continua su $]0,+\infty[$!!

In modo simile si può vedere il caso $x<0$.

(MA VEDI IL PUNTO c !!)

(c) In realtà lo studio fatto per f_n mostra che

$$\|f_n\|_{]-\infty,0]} = \frac{1}{1+n^2}$$

Dato che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} < +\infty$ la serie conv. totalmente su $]-\infty,0]$, da cui la restrizione di F a $]-\infty,0]$ è continua $\Rightarrow$ dunque F è continua da sinistra in $x=0$.

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{x^3-1}\,dx$$

Passiamo a $$(v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-1)}}{x^3-1}\,dx = e^{-i}\underbrace{(v.p)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^3-1}\,dx}_{(*)}$$

Vogliamo utilizzare i residui. Per questo consideriamo $f(x)=\dfrac{e^{ix}}{x^3-3}$ che ha tre poli, nelle radici cubiche di -1, cioè 1 e $\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

Per le formule note:

$$(*) = 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(f, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + \pi i \, \mathrm{Res}\left(f, 1\right)$$

Dato che i poli sono tutti semplici

•) $$\mathrm{Res}\left(f, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = \left.\frac{e^{ix}}{3x^2}\right|_{x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} =$$

$$\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i}}{3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = \frac{e^{-\frac{i}{2}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot}{3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$\frac{1}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}}$$

•) $$\mathrm{Res}(f, 1) = \left.\frac{e^{ix}}{3x^2}\right|_{x=1} = \frac{e^{i}}{3}$$

Dunque

$$(*) = \pi \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3}\left(-\sqrt{3}-i\right) e^{-\frac{i}{2}} + \frac{\pi i e^{i}}{3}$$

Moltiplicando per e^{-i} e prendendo la parte immaginaria si trova

$$\frac{\pi}{3} \mathrm{Im}\left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\sqrt{3}-i\right) e^{-\frac{3}{2}i} + i\right) =$$

$$\frac{\pi}{3} \mathrm{Im}\left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\sqrt{3}-i\right)\left(\cos\left(\frac{3}{2}\right) - i\sin\left(\frac{3}{2}\right)\right) + i\right) =$$

$$\frac{\pi}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\cos\left(\frac{3}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{3}$$

(3) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^3+x^2+x+1)} = (*)$$

Notiamo che $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$ che ha tre radici semplici poli e $-1,\ i,\ -i$. Per la formula nota

$$(*) = \pi i\Big(\text{Res}(f,-1) + \text{Res}(f,i) + \text{Res}(f,-i)\Big)$$

(dove $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}\,(z+1)(z^2+1)}$ e $\sqrt{z}$ è la determinazione della radice per cui $\sqrt{e^{i\theta}} = e^{i\theta/2}$ per $0<\theta<2\pi$). Allora

$$\text{Res}(f,-1) = \frac{1}{\sqrt{z}\,(z^2+1)}\Big|_{z=-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}\,((-1)^2+1)} = \frac{1}{2i}$$

$$\text{Res}(f,i) = \frac{1}{\sqrt{z}\,(z+1)(z+i)}\Big|_{z=i} = \frac{1}{e^{i\pi/4}\,(i+1)\,2i} = \frac{1}{e^{i\pi/4}\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\cdot 2i} =$$

$$= \frac{1}{i\cdot\sqrt{2}\cdot 2i} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Res}(f,-i) = \frac{1}{\sqrt{z}\,(z+1)(z-i)}\Big|_{z=-i} = \frac{1}{e^{i3\pi/4}\,(1-i)(-2i)} = \frac{1}{e^{3\pi i/4}\sqrt{2}\,e^{-\pi/4\, i}\,(-2i)} =$$

$$= \frac{1}{i\,\sqrt{2}\,(-2i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

DUNQUE

$$(*) = \pi i\left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

(4) (a) $x\,y'' = y + 1$

Cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Allora

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, x^{n-2}$$

$$x\,y'' - y = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\, n(n-1)\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{m+1}(m+1)m\, x^m - \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

TALE ESPRESSIONE DEVE FARE 1, che in serie di potenze significa $\sum_{n=0}^{\infty} b_m x^n$ dove $b_0 = 1$ e $b_m = 0$ se $n \geq 1$ (!!!)

DUNQUE

$$(\star) \quad \begin{cases} -a_0 = 1 \\ a_{m+1} = \dfrac{a_m}{(m+1)m} \end{cases} \quad \text{per } n \geq 1$$

NON VA D'ACCORDO CON $y(0) = 1$!!

NON ESISTE SOL. (FINE!)

SE INVECE AVESSI AVUTO $y(0) = -1$ ...

(continuo l'esercizio nell'ipotesi che la condizione iniziale fosse $y(0) = -1$)

NOTIAMO CHE LA RELAZIONE SOPRA PERMETTE DI SCEGLIERE AD ARBITRIO a_1 — una volta fatto la (a_m) è univocamente determinata. Comunque la soluzione non è unica (si può osservare come si vuole $y'(0)$). Vediamo che $y(x)$ è definita per ogni x. Infatti da $(\star)$ si ricava

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{1}{m(m+1)} \longrightarrow 0$$

DA CUI $\sqrt[m]{a_m} \to 0 \Rightarrow$ RAGGIO DI CONV. $= +\infty$!!!

In effetti si può scrivere esplicitamente a_m: si ha

$$a_1 = a_1, \quad a_2 = \frac{a_1}{2\cdot 3}; \quad a_3 = \frac{a_1}{2\cdot3\cdot3\cdot4}, \quad a_4 = \frac{a_1}{2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot4\cdot5}, \ \ldots$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{2a_1}{(m!)^2(m+1)}$$

(COSA CHE VOLENDO SI PUÒ DIM. PER INDUZIONE)

e quindi $\quad y(x) = 1 + 2a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{x^m}{(m!)^2(m+1)}$

(b) $\quad x\, y'' = y + \sin(x)$

Si possono rifare gli stessi calcoli dove però il termine noto $\sin(x)$ ha come sviluppo in serie

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m x^m$$

dove $\quad b_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ PARI} \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & \text{se } m = 2k+1, \ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$

Si arriva alle relazioni

$$a_0 = b_0$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{n(n+1)} \qquad \text{per } n \geq 1$$

Dato che $b_0 = 0$ si ha $a_0 = 0$ che rende impossibile la condizione $y(0) = 1$.

DUNQUE L'EQ. NON HA SOLUZIONE !