Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta intermedia del 11 dicembre 2009

1. Data la successione di funzioni definita da
$$f_n(x) := \frac{x}{n^3 + x^\alpha}.$$
   (a) Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0,+\infty[)$.
   (b) Si dica se per $\alpha = 2$ la serie converge in $L^2([0,+\infty[)$.
   (c) (*) Si dica per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0,1])$.

2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x| & \text{se } |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } |x| \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
e per α tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ chiamiamo f_α la funzione (translata) $f_\alpha(x) = f(x-\alpha)$.
   (a) Si dica per quali valori di α il problema differenziale
$$\begin{cases} y'' + 4y = f_\alpha & \text{in } [0, 2\pi] \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$$
   ammette soluzione.
   (b) Stessa domanda per il problema differenziale
$$\begin{cases} y'' + 16y = f_\alpha & \text{in } [0, 2\pi] \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

3. Si trovi la soluzione del problema differenziale di $\mathbf{R}$:
$$\begin{cases} y'' + y' = \operatorname{sgn}(x) e^{-2|x|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$
dove la funzione sgn (segno) è definita da $\operatorname{sgn}(x) = 1$ se $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ se $x < 0$.

(1.a) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^\alpha}$. Calcoliamo la norma $L_1([0,+\infty[)$:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{n^3+x^\alpha}\,dx = \left(x = n^{\frac{3}{\alpha}} y\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{n^{\frac{3}{\alpha}} y}{n^3 + n^3 y^\alpha}\, n^{\frac{3}{\alpha}}\,dy = \frac{1}{n^{3-\frac{6}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^\alpha}\,dy = \frac{1}{n^{3-\frac{6}{\alpha}}}\, C_\alpha$$

Notiamo che $C_\alpha < +\infty \iff \alpha > 2$ (perché $\dfrac{y}{1+y^\alpha} \simeq \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$ a $+\infty$)

e quindi $f_n \in L^1 \iff \alpha > 2$ che quindi è necessario per andare avanti. Si ha poi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 = C_\alpha \sum \frac{1}{n^{3-\frac{6}{\alpha}}}$$ che è finito $\iff 3 - \frac{6}{\alpha} > 1$

cioè per $2 > \frac{6}{\alpha} \iff \alpha > 3$. Quindi $\alpha > 3 \Rightarrow$ serie sommabile in $L^1([0,+\infty[)$. Viceversa se la serie è sommabile deve essere

$$\sum_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx \in \mathbb{R}$$

e la serie di sinistra nella formula sopra è proprio $C_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\frac{6}{\alpha}}}$, dato che $f_n \geq 0$ e quindi $\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n$.

Quindi la condizione $\boxed{\alpha > 3}$ è necessaria e sufficiente affinché la serie converga in $L^1([0,+\infty[)$.

(1.b) Calcoliamo le norme $L^2([0,+\infty[)$.

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(n^3+x^\alpha)^2}\,dx = \left(x = n^{\frac{3}{\alpha}} y\right) = \int_0^{+\infty} \frac{n^{\frac{6}{\alpha}} x \; n^{\frac{3}{\alpha}}}{n^6\,(1+y^\alpha)^2}\,dx =$$

$$\frac{1}{n^{6-\frac{9}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^\alpha)^2}\,dx = \frac{1}{n^{6-\frac{9}{\alpha}}}\, D_\alpha .$$

Si vede che $D_\alpha \in \mathbb{R} \iff 2\alpha - 2 > 1 \iff \alpha > 1/2$ (condizione preliminare per avere $f_n \in L^2([0,+\infty[)$. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 = \sqrt{D_\alpha} \sum \frac{1}{n^{3-\frac{9}{2\alpha}}}$$ che è finito se e solo se

$$3-\frac{9}{2\alpha}>1 \iff 2>\frac{9}{2\alpha} \iff \alpha>\frac{9}{4}.$$

Quindi per $\alpha>\frac{9}{4}$ la serie è convergente in $L^2([0,+\infty[)$ – mentre non è semplice verificare che la cond. è anche necessaria. Dato che nel quesito $\alpha=2$ abbiamo dim. che per $\alpha=2$ la serie conv. $L^2(0+\infty)$ – NATURALMENTE SI POTEVA METTERE $\alpha=2$ DALL'INIZIO.

(1.c) Calcoliamo $\|f_n\|_{L^1(0,1)}$.

$$\|f_n\|_1=\int_0^1|f_n(x)|\,dx=\int_0^1\frac{x}{n^3+x^\alpha}\,dx=(x=n^{\frac{3}{\alpha}}y)\int_0^{n^{-\frac{3}{\alpha}}}\frac{n^{\frac{3}{\alpha}}y}{n^3(1+y^\alpha)}n^{\frac{3}{\alpha}}\,dy$$

$$=\frac{1}{n^{3-\frac{6}{\alpha}}}\int_0^{\frac{1}{n^{3/\alpha}}}\frac{y}{1+y^\alpha}\,dy=\frac{1}{n^{3-6/\alpha}}C_{n,\alpha}\qquad (C_{n,\alpha}\in\mathbb{R}\ \forall n)$$

Notiamo che per y vicino a zero, essendo $\alpha>0$, $\frac{y}{1+y^\alpha}\simeq y$ per cui

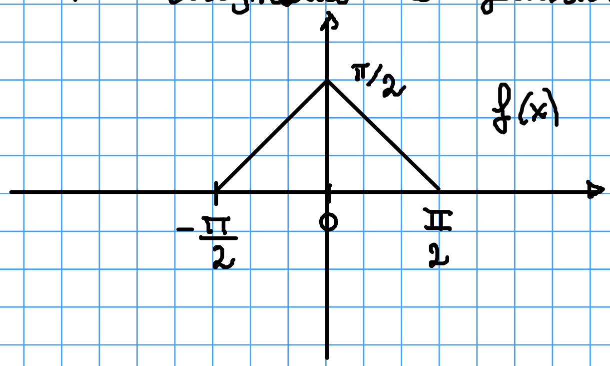
$$C_{n,\alpha}\simeq\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1/n^{\frac{3}{\alpha}}}=\frac{1}{2}\frac{1}{n^{6/\alpha}},\ \text{da cui}$$

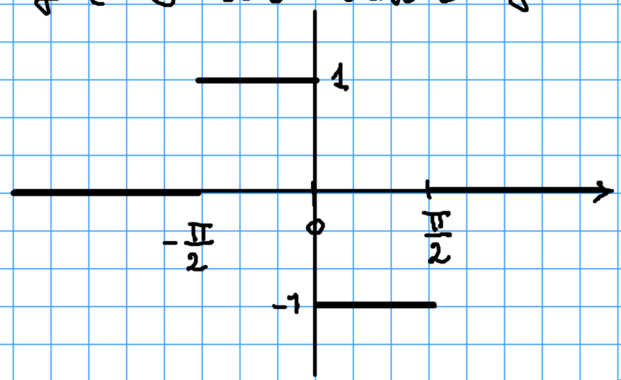
$$\|f_n\|_1\simeq\frac{1}{n^{3-\frac{6}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{6/\alpha}}=\frac{1}{2}\frac{1}{n^3}\ \text{e quindi,}$$

essendo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<+\infty$, la serie è assolutamente sommabile, dunque sommabile, per ogni $\alpha>0$.

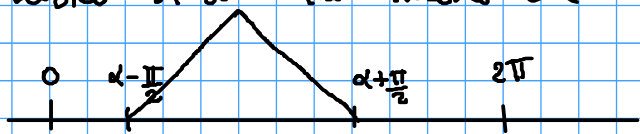
(2.a) Disegniamo la funzione f e la sua derivata f'

$\alpha+\frac{\pi}{2}<2\pi$





Dunque f_α è traslata a destra di α in modo che il "triangolo" cada in $[0,2\pi]$



Per risolvere il problema differenziale notiamo che $L = 2\pi$

per cui $\omega_0 = \frac{\pi}{L} = \frac{1}{2}$ e quindi cerchiamo i coefficienti

di f_α (e poi di y) rispetto alla base dei seni $S_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$

Se $f_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} f_n s_n$ sono:

$$f_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\alpha(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{f_\alpha(x)\left(-\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right)}{n/2}\right]_0^{2\pi}}_{\text{ZERO PERCHÉ } f_\alpha(0)=f_\alpha(2\pi)=0}$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{2}{n}\int_0^{2\pi} f_\alpha'(x)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)dx =$$

$$\frac{2}{n\pi}\left(\int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)dx - \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)dx\right) =$$

$$\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n}\left(\left[\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha} - \left[\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_{\alpha}^{\alpha+\pi/2}\right) =$$

$$\frac{4}{\pi n^2}\left(\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{n}{2}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{n}{2}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$$

$$\frac{4}{\pi n^2}\left(2\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\cos\left(-\frac{n}{2}\frac{\pi}{2}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\left(-\frac{n}{2}\frac{\pi}{2}\right)}\right.$$

$$\left. - \sin\left(\frac{2}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{n}{2}\frac{\pi}{2}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{n}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{n}{2}\frac{\pi}{2}\right)}\right) =$$

$$\frac{8}{\pi n^2}\left(\sin\left(n\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) =$$

$$\boxed{\frac{8}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}$$

Se ora $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n s_n(x)$ abbiamo

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n\left(-\frac{n^2}{4}\right)s_n(x)$$ da cui

$$\left(4-\frac{n^2}{4}\right)y_n = f_n$$ (risolubile se $n \neq 4$)

che <u>impone</u> $f_4 = 0$, cioè: $\left(\cos(\pi) = -1 \,!!!\right)$

$$0 = \sin(2\alpha)\left(1-\cos(\pi)\right) = 0 \iff \sin(2\alpha) = 0$$

$\iff \quad 2\alpha = h\pi \quad$ per $h \in \mathbb{Z}$

$\iff \quad \alpha = h\frac{\pi}{2} \quad$ per $h \in \mathbb{Z}$, ma i valori possibili di h

sono $h = 1, 2, 3$ per cui $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi}$

(2.b) Dato che f_α è lo stesso di prima, rifacendo gli stessi calcoli otteniamo

$$\left({*}16 - \frac{n^2}{4} \right) y_n = f_n \qquad (\text{risolubile se } n \neq 8)$$

* Nel testo c'era 32: allora è chiaro che $\forall n$ y_n è definito $\Rightarrow \exists$ sol. $\forall \alpha$

che impone $f_8 = 0$. Ma essendo

$$f_8 = \frac{8}{\pi \cdot 64} \sin(4\alpha)\left(1 - \cos(2\pi)\right) = 0 \qquad \forall \alpha \quad (\cos(2\pi) = 1)$$

si ha che il problema è risolubile $\boxed{\text{per ogni } \alpha}$

(3) Trasformiamo $f(t) = \operatorname{sgn}(t)\, e^{-2|t|}$ secondo Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} (-1) e^{2t} e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} e^{-i\omega t} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{(2-i\omega)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(2+i\omega)} dt =$$

$$-\left[\frac{e^{(2-i\omega)t}}{2 - i\omega} \right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-(2+i\omega)t}}{2 + i\omega} \right]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega} =$$

$$\frac{-2-i\omega+2-i\omega}{4+\omega^2} = \boxed{\frac{-2i\omega}{4+\omega^2}}$$

Trasformiamo ora l'equazione, mediante Fourier:

$$-\omega^2 \hat{y}(\omega) + i\omega \hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{-2i\omega}{4+\omega^2} \iff$$

$$\left(-\omega + i\right) \hat{y}(\omega) = \frac{-2i}{4+\omega^2} \iff$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2i}{(\omega - i)(\omega - 2i)(\omega + 2i)}$$

Posto $g(z) = \dfrac{2i\, e^{itz}}{(z-i)(z-2i)(z+2i)}$ ci servono i residui di g nei suoi poli, che sono $i, 2i, -2i$, tutti semplici (:-)

$$\mathrm{Res}(g,i) = \left.\frac{2i\, e^{itz}}{(z-2i)(z+2i)}\right|_{z=i} = \frac{2i\, e^{-t}}{(-i)(3i)} = \boxed{\frac{2}{3} i\, e^{-t}}$$

$$\mathrm{Res}(g,2i) = \left.\frac{2i\, e^{itz}}{(z-i)(z+2i)}\right|_{z=2i} = \frac{2i\, e^{-2t}}{i \cdot 4i} = \boxed{-\frac{i}{2} e^{-2t}}$$

$$\mathrm{Res}(g,-2i) = \left.\frac{2i\, e^{itz}}{(z-i)(z-2i)}\right|_{z=-2i} = \frac{2i\, e^{2t}}{(-3i)(-4i)} = \boxed{-\frac{i}{6} e^{2t}}$$

Ne segue

$$y(t) = \begin{cases} i\big(\mathrm{Res}(i) + \mathrm{Res}(2i)\big) = -\frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} & \text{se } t>0 \\ (-i)\,\mathrm{Res}(-2i) = -\frac{1}{6} e^{2t} & \text{se } t<0 \end{cases}$$

NOTA CHE $y(0^+) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{6} = y(0^-)$

$$y'(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-t} - e^{-2t} & \text{se } t>0 \\ -\frac{1}{3} e^{2t} & \text{se } t<0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y'(0^+) &= \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \\ y'(0^-) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Mentre ci sarà sicuramente un salto in $y''(t)$ per $t=0$;

$$y''(t) = \begin{cases} -\frac{2}{3} e^{-t} + 2e^{-2t} & \text{se } t>0 \\ -\frac{2}{3} e^{2t} & \text{se } t<0 \end{cases}$$

VERIFICHIAMO L'EQ.

$\underline{t>0}$ $\quad y'' + y' = \cancel{-\frac{2}{3} e^{-t}} + 2e^{-2t} + \cancel{\frac{2}{3} e^{-t}} - e^{-2t} = e^{-2t}$

$\underline{t<0}$ $\quad y'' + y' = -\frac{2}{3} e^{2t} - \frac{1}{3} e^{2t} = -e^{2t}$ $\qquad = \mathrm{sgn}(t)\, e^{-|2t|}$

Questo ultimo parte di verifiche, ovviamente, non era richiesto