Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 25 giugno 2007 SOLUZIONI

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Si consideri la serie di funzioni

$$f(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nt}$$

1. Si trovi l'insieme delle t per cui la serie è convergente (cioè quello per cui $f(t)$ è definita). Indichiamo con I tale insieme
2. Si dica, motivandolo, per quali t in I la f (oltre a esistere) risulta derivabile.
3. Si trovi, motivandola, l'espressione di $f(t)$ per tutte le t di I

Svolgimento. È chiaro che per ogni $t > 0$ la serie converge (e^{-nt} tende a zero MOLTO rapidamente e così ne^{-nt}). Viceversa se $t \leq 0$ $ne^{-nt} \to +\infty$ e dunque la serie non può convergere. Quindi $I =]0, +\infty[$.
Se consideriamo la serie delle derivate termine a termine troviamo

$$g(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-nt}.$$

Tale serie converge assolutamente su $[\epsilon, +\infty[$, per qualunque $\epsilon > 0$ dato che, se $g_n(t) := n^2 e^{-nt}$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|g_n\|_{\infty,[\epsilon,+\infty[} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-n\epsilon} < +\infty$$

e quindi g è la derivata di f su ogni $[\epsilon, +\infty[$. Dato che questo è vero per ogni $\epsilon > 0$ si ha che g è la derivata di f su I.
Se consideriamo

$$h(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$$

si vede facilmente, ragionando come sopra, che $f = h'$ su I. D'altra parte

$$h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-t}}$$

e quindi, per ogni $t > 0$,

$$f(t) = h'(t) = \frac{e^{-t}}{(1 - e^{-t})^2}.$$

□

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{16 + x^4}\, dx.$$

Svolgimento. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{16+x^4}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad\qquad \text{dove } f(z) := \frac{e^{3iz}}{16+z^4}$$

La funzione f è meromorfa ed ha quattro poli semplici nelle radici quarte di -16, che sono i quattro numero complessi $z_1 := \sqrt{2}(1+i)$, $z_2 := \sqrt{2}(-1+i)$, $z_3 := \sqrt{2}(1-i)$, $z_4 := \sqrt{2}(-1-i)$. Calcoliamo i residui nei poli con parte immaginaria positiva

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,z_1) &= \frac{e^{3iz_1}}{4z_1^3} = \frac{z_1e^{3iz_1}}{4z_1^4} = \sqrt{2}\frac{(1+i)e^{-3+3i}}{64}\\
\mathrm{Res}(f,z_2) &= \frac{e^{3iz_2}}{4z_2^3} = \frac{z_2e^{3iz_2}}{4z_1^4} = \sqrt{2}\frac{(-1+i)e^{-3-3i}}{64}
\end{aligned}$$

Per i teoremi sui residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{32}\left((-1+i)e^{-3+3i}+(-1-i)e^{-3-3i}\right) =$$
$$\frac{\sqrt{2}\pi}{32}2\Re e\left((-1+i)e^{-3+3i}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}e^{-3}\Re e\left((-1+i)e^{3i}\right) =$$
$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16}e^{-3}\Re e\left((-1+i)(\cos(3)+i\sin(3))\right) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{16}e^{-3}(\cos(3)+\sin(3)).$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{16+x^4}\,dx = \Re e\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -\frac{\sqrt{2}\pi}{16}e^{-3}(\cos(3)+\sin(3)).$$

□

(b.1) Si scriva lo sviluppo in serie di Fourier della funzione f definita de

$$f(t) = \begin{cases} 1-\frac{4}{\pi^2}t^2 & \text{se } t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ -1+\frac{4}{\pi^2}(t-\pi)^2 & \text{se } t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\\ -1+\frac{4}{\pi^2}(t+\pi)^2 & \text{se } t\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

e prolungata a tutto $\mathbf{R}$ come funzione periodica di periodo 2π.

Svolgimento. Si ha

$$f'(t) = \begin{cases} -\frac{8}{\pi^2}t & \text{se } t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ \frac{8}{\pi^2}(t-\pi) & \text{se } t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\\ \frac{8}{\pi^2}(t+\pi) & \text{se } t\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}, \qquad f''(t) = \begin{cases} -\frac{8}{\pi^2} & \text{se } t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ \frac{8}{\pi^2} & \text{se } t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\\ \frac{8}{\pi^2} & \text{se } t\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Notiamo che f e f' sono continue anche quando periodicizzate con periodo 2π, in particolare hanno lo stesso valore in $-\pi$ e π Questa osservazione giustifica i passaggi nelle integrazioni per parti che seguono.

Calcoliamo i coefficienti di Fourier complessi, quelli per cui $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$, dati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

È immediato notare che f ha integrale nullo, e quindi $c_0) = 0$. Se $k \neq 0$

$$2\pi c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \left[\frac{f(t)e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt =$$
$$\left[\frac{f'(t)e^{-ikt}}{(-ik)(ik)}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(ik)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)e^{-ikt}\,dt = -\frac{1}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)e^{-ikt}\,dt =$$
$$-\frac{1}{k^2}\frac{8}{\pi^2}\left(\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = -\frac{8i}{\pi^2k^3}\left(\left[e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} - \left[e^{-ikt}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[e^{-ikt}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$
$$-\frac{8i}{\pi^2k^3}\left(e^{ik\frac{\pi}{2}} - e^{ik\pi} - e^{ik\frac{-\pi}{2}} + e^{ik\frac{\pi}{2}} + e^{-ik\pi} - e^{-ik\frac{\pi}{2}}\right) =$$
$$-\frac{8i}{\pi^2k^3}\left((i)^k - (-1)^k - (-i)^k + (i)^k + (-1)^k - (-1)^k\right) = -\frac{16i}{\pi^2k^3}\left((i)^k - (-i)^k\right) =$$
$$-\frac{16i^{k+1}}{\pi^2k^3}\left(1 - (-1)^k\right) =$$

Dunque se $k \neq 0$ $c_k = -\dfrac{8i^{k+1}}{\pi^3k^3}(1 - (-1)^k)$. Volendo si può notare che

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\dfrac{16i^{k+1}}{\pi^3k^3} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\dfrac{16(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\pi^3k^3} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si può anche passare alla forma reale $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nt) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nt)$:

$$a_k = 2\Re e(c_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\dfrac{32(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\pi^3k^3} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}, \qquad b_k = -\Im m(c_k) = 0.$$

da cui

$$f(t) = -\frac{32}{\pi^3}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^{h+1}}{2h+1}\cos((2h+1)t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\cos((2h+1)t)$$

□

(b.2) Si consideri il problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 4y' = \operatorname{sgn}(t)e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

Si determinino i possibili $\omega_0 > 0$ per cui esiste una soluzione e per tali ω_0 si trovino tutte le possibili soluzioni.

Svolgimento. Usiamo la trasformata di Fourier. Se $b(t) := \operatorname{sgn}(t)e^{-|t|}$ si ha

$$\hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)e^{-i\omega t}\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\,dt + \int_0^{\infty} e^{(-1-i\omega)t}\,dt =$$
$$-\left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-1-i\omega)t}}{-1-i\omega}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{-1-i\omega} = \frac{1}{i\omega-1} + \frac{1}{i\omega+1} = \frac{-2i\omega}{\omega^2+1}$$

Se ne ricava

$$(-\omega^2 + 4\omega i)\hat{y}(\omega) = \frac{-2i\omega}{(\omega^2+1)} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{2i}{(\omega^2+1)(\omega-4i)}$$

Per trovare y poniamo $F(\omega) := \dfrac{2ie^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega-4i)}$. F ha tre poli semplici nei punti i, $4i$ e $-i$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(F,i) &= \left[\frac{2ie^{i\omega t}}{2\omega(\omega-4i)+(\omega^2+1)}\right]_{\omega=i} = \frac{2ie^{-t}}{2i(-3i)} = i\frac{e^{-t}}{3} \\
\mathrm{Res}(F,4i) &= \left[\frac{2ie^{i\omega t}}{2\omega(\omega-4i)+(\omega^2+1)}\right]_{\omega=4i} = -\frac{2ie^{-4t}}{-16+1} = 2i\frac{e^{-4t}}{15} \\
\mathrm{Res}(F,-i) &= \left[\frac{2ie^{i\omega t}}{2\omega(\omega-4i)+(\omega^2+1)}\right]_{\omega=-i} = \frac{2ie^{t}}{(-2i)(-5i)} = -i\frac{e^{t}}{5}
\end{aligned}$$

e quindi

$$y(t) = \begin{cases} i\left(\mathrm{Res}(F,i) + \mathrm{Res}(F,4i)\right) = -\dfrac{e^{-t}}{3} - 2\dfrac{e^{-4t}}{15} & \text{se } t > 0, \\ -i\mathrm{Res}(F,-i) = -\dfrac{e^{t}}{5} & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

□

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si trovino le soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Svolgimento. Usiamo la trasformata di Fourier, ricordando che $\widehat{\delta'}(\omega) = i\omega\hat{\delta}(\omega) = i\omega$. Allora

$$\begin{aligned}
(-\omega^2+4)\hat{y}(\omega) = i\omega \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) &= \frac{-i\omega}{\omega^2-1} + c_1\delta(\omega-2) + c_2\delta(\omega+2) = \\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{i}{\omega-1} + \frac{i}{\omega+1}\right) + c_1\delta(\omega-2) + c_2\delta(\omega+2)
\end{aligned}$$

Osserviamo che che

$$\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(t))(\omega) = \frac{-2i}{\omega} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathrm{sgn}(t)e^{2it})(\omega) = \frac{-2i}{\omega-2} \Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{4}\mathrm{sgn}(t)e^{2it}\right)(\omega) = \frac{-i}{2(\omega-2)}$$

e analogamente

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4}\mathrm{sgn}(t)e^{-2it}\right)(\omega) = \frac{-i}{2(\omega+2)}$$

da cui

$$y(t) = \frac{1}{4}\mathrm{sgn}(t)e^{2it} + \frac{1}{4}\mathrm{sgn}(t)e^{-2it} + c_1e^{2it} + c_2e^{-2it} = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\cos(2t) + d_1\sin(2t) + d_2\cos(2t)$$

(c_1, c_2, d_1, d_2 indicao delle costanti arbitrarie). □

(c.2) Si trovino le soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 4y = H(t)te^{2t} \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Usiamo la trasformata di Laplace. Se $b_1(t) := H(t)e^{2t}$ si ha $\check{b_1}(z) = \dfrac{1}{z-2}$. Ne segue che, se $b(t) = tb_1(t)$, che è il temine noto dell'equazione, risulta

$$\check{b}(z) = -\frac{d}{dz}\check{b_1}(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$$

Trasformando l'equazione

$$\check{y}(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z^2+4)}$$

Per ricavare y dobbiamo calcolare i residui di $F(z) := \dfrac{e^{zt}}{(z-2)^2(z^2+4)}$ in tutti i poli e sommarli. I poli sono $z = 2$ (doppio) e $z = \pm 2i$ (semplici). Si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(F, 2i) &= \left[\frac{e^{zt}}{(z-2)^2 2z + 2(z-2)(z^2+4)}\right]_{z=2i} = \frac{e^{2it}}{(2i-2)^2 2(2i)} = \frac{e^{2it}}{(-8i)2(2i)} = \frac{e^{2it}}{32} \\
\operatorname{Res}(F, -2i) &= \overline{\operatorname{Res}(F, 2i)} = \frac{e^{-2it}}{32} \\
\operatorname{Res}(F, 2) &= \left[\frac{d}{dz}\frac{e^{zt}}{z^2+4}\right]_{z=2} = \left[\frac{te^{zt}(z^2+4) - e^{zt}2z}{(z^2+4)^2}\right]_{z=2} = \frac{8te^2 - 4e^{2t}}{64}
\end{aligned}$$

In definitiva

$$y(t) = H(t)\left(\frac{e^{2it}}{32} + \frac{e^{-2it}}{32} + \frac{te^{2t}}{8} - \frac{e^{2t}}{16}\right) = H(t)\left(\frac{\cos(2t)}{16} + \frac{te^{2t}}{8} - \frac{e^{2t}}{16}\right)$$

□

(c.3) Si trovi la soluzione del problema differenziale su **R**:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$$

Svolgimento. Supponiamo che y sia soluzione e poniamo $v(t) := H(t)y(t)$. Allora

$$\begin{aligned}
v' &= \delta y + Hy' = \delta + Hy && \text{perché } y(0) = 1 \\
v'' &= \delta' + \delta y + Hy'' = \delta' - \delta + Hy'' && \text{perché } y'(0) = -1
\end{aligned}$$

Dunque $v(t) = 0$ per $t < 0$ e v risolve

$$v'' + 4v = \delta' - \delta + H(y'' + 4y) = \delta' - \delta$$

Cerchiamo v tramite la trasformata di Laplace:

$$\check{v}(z) = \frac{z-1}{z^2+4}$$

e quindi, per $t > 0$,

$$y(t) = \operatorname{Res}\left(\frac{(z-1)e^{zt}}{z^2+4}, 2i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{(z-1)e^{zt}}{z^2+4}, -2i\right) =$$

$$\left[\frac{(z-1)e^{zt}}{2z}\right]_{z=2i} + \left[\frac{(z-1)e^{zt}}{2z}\right]_{z=-2i} = \frac{(2i-1)e^{2it}}{4i} - \frac{(-2i-1)e^{-2it}}{4i} = \frac{(2+i)e^{2it}}{4} + \frac{(2-i)e^{-2it}}{4i} =$$

$$\frac{1}{2}\Re e\left((2+i)e^{2it}\right) = \frac{1}{2}\left((2\cos(2t) - \sin(2t)\right)$$

In definitiva, per ogni t reale $y(t) = \frac{1}{2}\left((2\cos(2t) - \sin(2t)\right)$ $\square$