Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 16 luglio 2007

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Si consideri la serie di funzioni

$$f(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 t^2}{1 + n^4 t^4}$$

1. Si trovi l'insieme delle t per cui la serie è convergente (cioè quello per cui $f(t)$ è definita). Indichiamo con I tale insieme
2. Si dica, motivandolo, per quali t in I la f (oltre a esistere) risulta continua.
3. Si dica, motivandolo, per quali t in I la f (oltre a esistere) risulta derivabile.

Svolgimento. È chiaro che la serie converge puntualmente per ogni t. Infatti se $t = 0$ tutti i suoi addendi sono nulli, mentre se $t \neq 0$ $\frac{n^2t^2}{1+n^4t^4} \approx \frac{1}{n^2}$ e $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge.

Per studiare la convergenza uniforme (utile per capire se f è continua) poniamo $f_n(t) := \dfrac{n^2t^2}{1+n^4t^4}$. È chiaro che ogni f_n tende a zero a $\pm\infty$ e che

$$f_n'(t) = 2n^2t \frac{1 - n^4t^4}{(1 + n^4t^4)^2}.$$

Ne segue che ogni f_n raggiunge il massimo in $1/n$ dove assume il valore $f_n(1/n) = \frac{1}{2}$. Questo mostra che f_n non tende uniformemente a zero negli intorni di zero e quindi non si può sperare che la serie sia uniformente convergente vicino a zero. Se però fissiamo $\bar{t} > 0$, sempre dall'esame delle f_n' si deduce che

$$\|f_n\|_{\infty,[\bar{t},+\infty[} = f_n(\bar{t}) = \frac{n^2\bar{t}^2}{1 + n^4\bar{t}^4} \qquad \text{se } n \geq \frac{1}{\bar{t}}.$$

Ne segue che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[\bar{t},+\infty[} < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge uniformrmente su } [\bar{t}, +\infty[.$$

e quindi f è continua su $[\bar{t}, +\infty[$. Per larbitrarietà di $\bar{t}$ e ripetendo lo stesso ragionamente su $] - \infty, -\bar{t}]$ si deduce che f è continua su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

In maniera analoga si vede che la serie delle derivate converge uniformemente su $[\bar{t}, +\infty[$: si può vedere abbastanza semplicemente che:

$$\|f_n'\|_{\infty,[\bar{t},+\infty[} \leq \frac{costante}{n^4\bar{t}^4} \qquad \text{se } n \geq \frac{1}{\bar{t}}.$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty,[\bar{t},+\infty[} < +\infty \Longrightarrow f \text{ è derivabile su } [\bar{t}, +\infty[\text{ e } f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t).$$

In definitiva f è anche derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Si può infine vedere che f non è continua in zero. Infatti $f(0) = 0$ ma

$$f(1/n) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(1/n) \geq f_n(1/n) = 1,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n) \neq f(0).$$

□

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{64 + x^6}\, dx.$$

Svolgimento. Usiamo il metodo dei residui. La funzione $f(z) := \frac{z^4}{64+z^6}$ ha sei poli semplici nelle radici seste di -64 che sono $z_j = 2e^{\frac{\pi}{6}i + k\frac{\pi}{3}i}$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. In particolare $z_1 = \sqrt{3} + i$ $z_2 = 2i$ e $z_3 = -\sqrt{3} + i$.
Allora $\mathrm{Res}(f, z_j) = \left.\frac{z^4}{6z^5}\right|_{z=z_j} = \frac{1}{6z_j} = \frac{\bar{z}_j}{6z_j\bar{z}_j} = \frac{\bar{z}_j}{24}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_1) &= \frac{\sqrt{3} - i}{24}, \\
\mathrm{Res}(f, z_2) &= \frac{-2i}{24}, \\
\mathrm{Res}(f, z_3) &= \frac{-\sqrt{3} - i}{24},
\end{aligned}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{j=1,2,3} \mathrm{Res}(f, z_j) = 2\pi i \frac{\sqrt{3} - i - 2i - \sqrt{3} - i}{24} = \frac{\pi}{3}$$

□

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1}\, dx.$$

Svolgimento. Notiamo che l'integrale proposto esiste nonostante il denominatore si annulli in $x = 1$ a causa della presenza di $\sin(x - 1)$ al numeratore. Passiamo all'integrale complesso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-1)}}{x^3 - 1}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

avendo posto $f(z) := \frac{e^{i(z-1)}}{z^3-1}$ (l'ultimo integrale va inteso nel senso del valore principale - cosa possibile visto che $x = 1$ è un polo semplice per f). Oltre al polo reale $x = 1$ f ha altri due poli semplici in $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (che sono le altre radici cubiche di 1). Usando il teorema dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left(f, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \pi i \mathrm{Res}(f, 1).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left(f,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left[\frac{e^{(z-1)i}}{3z^2}\right]_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\left[\frac{ze^{(z-1)i}}{3z^3}\right]_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}=\\
&\quad\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\cos\left(\frac{3}{2}t\right)-i\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)=\\
&\quad\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)i\right];\\
&\operatorname{Res}(f,1)=\left[\frac{e^{(z-1)i}}{3z^2}\right]_{z=1}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\\
&-2\pi\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)+\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)i\right]+\frac{\pi i}{3}
\end{aligned}\tag{1}$$

da cui, prendendo la parte immaginaria

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x-1)}{x^3-1}\,dx=-2\pi\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)+\frac{\pi}{3}$$

□

(b.1) Si dica per quali valori del parametro T in $\mathbf{R}$ il problema differenziale su $[0,\pi]$

$$\begin{cases}y''+9y=t(t-\pi)(t-T)\\ y(0)=y(\pi)=0\end{cases}$$

ha soluzioni (su $[0,\pi]$). Per tali valori di T si scrivano le soluzioni mediante una (opportuna) serie di Fourier.
Si consiglia di studiare preliminarmente $f(t)=t(t-\pi)(t-T)$, per t in $[0,\pi$, assieme a f',f'' ed f''' e tenere in mente le proprietà di tali funzioni quando si integra per parti.

Svolgimento. Notiamo che

$$f(0)=f(\pi)=0,\quad f''(t)=6t-(\pi+T),\quad f'''(t)=6$$

Sviluppiamo f rispetto a $\sin(kt)$ per $k\in\mathbf{N}$ (ricordando che tale famiglia di funzioni genera tutte le funzioni $L^2([0,\pi])$ ed è fatta da funzioni che si annullano in 0 e in π).

Se $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(kt)$, allora:

$$\frac{\pi}{2} f_k = \int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = -\underbrace{\left[\frac{f(t)\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(kt)\,dt =$$

$$\underbrace{\left[\frac{f'(t)\sin(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi} f''(t)\sin(kt)\,dt = \left[\frac{f''(t)\cos(kt)}{k^3}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k^3}\int_0^{\pi} f'''(t)\cos(kt)\,dt =$$

$$\frac{(5\pi - T)(-1)^k + \pi + T}{k^3} - \underbrace{\left[\frac{6\sin(kt)}{k^4}\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

Quindi

$$f_k = \frac{2}{\pi}\frac{(5\pi - T)(-1)^k + \pi + T}{k^3}$$

Se cerchiamo y della forma $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(kt)$ (coerentemente con le condizioni al contorno che in questo modo vengono *automaticamente* verificate) troviamo $y''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 y_k \sin(kt)$ e quindi per ogni k deve essere:

$$(9 - k^2) y_k = f_k$$

Quindi perché la soluzione esiste deve essere $f_3 = 0$ Tale condizione significa:

$$-(5\pi - T) + \pi + T = 0 \Leftrightarrow 2T - 4\pi = 0 \Leftrightarrow T = 2\pi.$$

Per questo (unico) valore di T la soluzione esiste infatti possiamo ricavare

$$y_k = \frac{f_k}{9 - k^2} \qquad \text{se } k \neq 3$$

e scegliere ad arbitrio y_3. Dunque, $T = 2\pi$ le soluzioni esistono e sono date da

$$y(t) = \sum_{k \neq 3} 6\frac{(-1)^k + 1}{(9 - k^2)k^3}\sin(kt) + \bar{y}\sin(3t) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{3}{2h^3(9 - 4h^2)}\sin(2ht) + \bar{y}\sin(3t)$$

per un arbitrario valore di $\bar{y}$, mentre non esistono se $T \neq 2\pi$. □

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(4x^2+1)^2}\,dx$$

(b.2) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sgn}(t)e^{-4|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

Svolgimento. Se $b(t) = \operatorname{sgn}(t)e^{-4|t|}$ allora

$$\hat{b}(\omega) = -\int_{-\infty}^{0} e^{4t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-4t}e^{-i\omega t}\,dt = -\left[\frac{e^{(4-i\omega)t}}{4-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-4-i\omega)t}}{-4-i\omega}\right]_{0}^{+\infty} =$$
$$\frac{1}{-4+i\omega} + \frac{1}{4+i\omega} = \frac{-2i\omega}{\omega^2+16}$$

Applicando la trasformata di Fourier a entrambi i membri dell'equazione:

$$(-\omega^2 + 2\omega i + 2)\hat{y}(\omega) = \frac{-2i\omega}{\omega^2+16} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{2i\omega}{(\omega^2+16)(\omega^2-2\omega i-2)}.$$

Poniamo $f(\omega) := \dfrac{2i\omega e^{i\omega t}}{(\omega^2+16)(\omega^2-2\omega i-2)}$; per ricavare $y(t)$ dobbiamo calcolare i residui della funzione olomorfa f nei suoi poli (semplici) $\pm 4i$ e $i \pm 1$. Si ha:

$$\operatorname{Res}(f,4i) = \left[\frac{2i\omega e^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2-2\omega i-2)+(\omega^2+16)(2\omega-2i)}\right]_{\omega=4i} = \frac{-8e^{-4t}}{8i(-16+8-2)} = \frac{e^{-4t}}{10i}$$

$$\operatorname{Res}(f,-4i) = \left[\frac{2i\omega e^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2-2\omega i-2)+(\omega^2+16)(2\omega-2i)}\right]_{\omega=-4i} = \frac{8e^{4t}}{-8i(-16-8-2)} = \frac{e^{4t}}{26i}$$

$$\operatorname{Res}(f,i+1) = \left[\frac{2i\omega e^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2-2\omega i-2)+(\omega^2+16)(2\omega-2i)}\right]_{\omega=i+1} = \frac{2(i-1)e^{(i-1)t}}{(2i+16)2} =$$
$$e^{-t}\frac{(i-1)(8-i)e^{it}}{2\cdot 65} = e^{-t}\frac{(-7+9i)(\cos(t)+i\sin(t))}{130} =$$
$$e^{-t}\frac{(-7\cos(t)-9\sin(t))+i(9\cos(t)-7\sin(t))}{130}$$

$$\operatorname{Res}(f,i-1) = \left[\frac{2i\omega e^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2-2\omega i-2)+(\omega^2+16)(2\omega-2i)}\right]_{\omega=i-1} = \frac{-2(i+1)e^{-(i+1)t}}{(-2i+16)(-2)} =$$
$$e^{-t}\frac{(i+1)(8+i)e^{-it}}{2\cdot 65} = e^{-t}\frac{(7+9i)(\cos(t)-i\sin(t))}{130} =$$
$$e^{-t}\frac{(7\cos(t)+9\sin(t))+i(9\cos(t)-7\sin(t))}{130}$$

Ne segue che per $t > 0$

$$y(t) = i(\operatorname{Res}(f,4i)+\operatorname{Res}(f,i+1)+\operatorname{Res}(f,i-1)) = \frac{e^{-4t}}{10} +$$
$$e^{-t}\frac{(-7\cos(t)-9\sin(t))i-(9\cos(t)-7\sin(t))}{130} + e^{-t}\frac{(7\cos(t)+9\sin(t))i-(9\cos(t)-7\sin(t))}{130} =$$
$$\frac{e^{-4t}}{10} - \frac{e^{-t}}{65}(9\cos(t)-7\sin(t))$$

mentre per $t < 0$:

$$y(t) = -i(\operatorname{Res}(f,-4i) = -\frac{e^{4t}}{26}$$

$\square$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 9y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Fourier ai termini dell'equazione:

$$(-\omega^2 + 9)\hat{y}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{1}{9 - \omega^2} + C_1\delta(\omega - 3) + C_2\delta(\omega + 3) \Leftrightarrow$$
$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\omega + 3} - \frac{1}{\omega - 3}\right) + C_1\delta(\omega - 3) + C_2\delta(\omega + 3)$$

Dato che

$$\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(t))(\omega) = \frac{-2i}{\omega} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{i}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

e quindi

$$y(t) = \frac{i}{12}\left(e^{-3it} - e^{3it}\right)\mathrm{sgn}(t) + C_1\delta e^{3it} + C_2 e^{-3it} = \frac{1}{6}\mathrm{sgn}(t)\sin(3t) + D_1\cos(3t) + D_2\sin(3t).$$

□

(c.2) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 9y = H(t)\sin(3t) \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trsformata di Laplace a entrambi i termini dell'equazione. Si ha:

$$(z^2 + 9)\check{y}(z) = \frac{3}{z^2 + 9} \Rightarrow \check{y}(z) = \frac{3}{(z^2 + 9)^2}$$

Per antitrasformare utilizziamo i residui di $f(z) := \frac{3e^{zt}}{(z^2+9)^2}$ che ha due poli doppi in $\pm 3i$. Si ha

$$\mathrm{Res}(f, 3i) = \left[\frac{d}{dz}\frac{3e^{zt}}{(z + 3i)^2}\right]_{z=3i} =$$
$$\left[\frac{3te^{zt}(z + 3i) - 6e^{zt}}{(z + 3i)^3}\right]_{z=3i} = \frac{3te^{3it}(6i) - 6e^{3it}}{(6i)^3} = \left(-\frac{3}{36}t - \frac{i}{36}\right)e^{3it}$$

e $\mathrm{Res}(f, -3i) = \overline{\mathrm{Res}(f, 3i)} = \left(-\frac{3}{36}t + \frac{i}{36}\right)e^{-3it}$. Quindi per $t > 0$:

$$y(t) = \mathrm{Res}(f, 3i) + \mathrm{Res}(f, -3i) = 2\Re e\left(\mathrm{Res}(f, 3i)\right) = 2\Re e\left(\left(-\frac{3}{36}t - \frac{i}{36}\right)e^{3it}\right) =$$
$$\frac{1}{18}(-3t\cos(3t) + \sin(3t))$$

cioé $y(t) = \frac{1}{18}H(t)(-3t\cos(3t) + \sin(3t))$ □

(c.3) Si trovi la soluzione del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 9y = 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Poniamo $v(t) = H(t)y(t)$. Allora $v'(t) = \delta(t)y(t) + H(t)y'(t) = \delta(t)y(0) + H(t)y'(t) = H(t)y'(t)$, mentre $v''(t) = \delta(t)y'(t) + H(t)y''(t) = \delta(t)y'(0) + H(t)y''(t) = delta(t) + H(t)y''(t)$. Dunque v verifica:

$$\begin{cases} v'' + 9v = H(t) + \delta \\ v(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Cerchiamo v applicando la trasformata di Laplace:

$$(z^2 + 9)\check{v}(z) = \frac{1}{z} + 1 = \frac{1+z}{z} \Leftrightarrow \check{v}(z) = \frac{1+z}{z(z^2+9)}$$

Posto $f(z) := \frac{(1+z)e^{zt}}{z(z^2+9)}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, 0) &= \left[\frac{(1+z)e^{zt}}{(z^2+9)}\right]_{z=0} = \frac{1}{9} \\ \mathrm{Res}(f, 3i) &= \left[\frac{(1+z)e^{zt}}{z(z+3i)}\right]_{z=3i} = \frac{-1-3i}{18}e^{3it} \\ \mathrm{Res}(f, -3i) &= \overline{\mathrm{Res}(f, 3i)} \end{aligned}$$

e quindi

$$v(t) = \frac{1}{9} + 2\Re e\left(\frac{-1-3i}{18}e^{3it}\right) = \frac{1}{9}H(t)\left(1 - \cos(3t) + 3\sin(3t)\right)$$

da cui $y(y) = \dfrac{1 - \cos(3t) + 3\sin(3t)}{9}$. □