Comlementi di Matematica - Ingegneria Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 20 giugno 2006

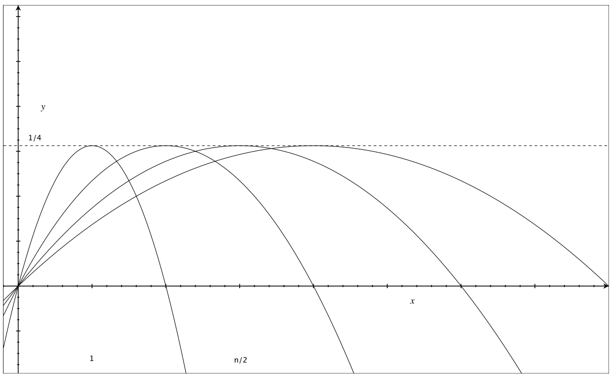
Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

1. Si consideri la successione di funzioni definita da $f_n(x) := \dfrac{nx - x^2}{n^2}$ per $x \in [0, 1]$.
   (a) Si dica se f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}$ e in caso affermativo si trovi il limite puntuale delle f_n.
   (b) Si dica se f_n converge uniformemente su $[0, 1]$.
   (c) Si dica se f_n converge uniformemente su $[1, +\infty[$.
2. Si calcoli $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)}\,dx$
3. Si consideri il problema:
$$\begin{cases} y'' + 4\pi^2 y = t(1-t) & \text{se } t \in]0,1[\\ y(0) = 0 = y(1). \end{cases}$$
   Si dica se esiste una soluzione y, se la soluzione è unica e si esprima ogni possibile soluzione mediante una serie di Fourier (opportuna).
4. Si trovi la soluzione del problema:
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = H(-t)e^{2t} \\ y \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

Risoluzione

1. (a) Si vede facilmente che f_n tende puntualmente a zero, dato che, per x fissato, il numeratore va all'infinito come n mentre il denominatore va come n^2.

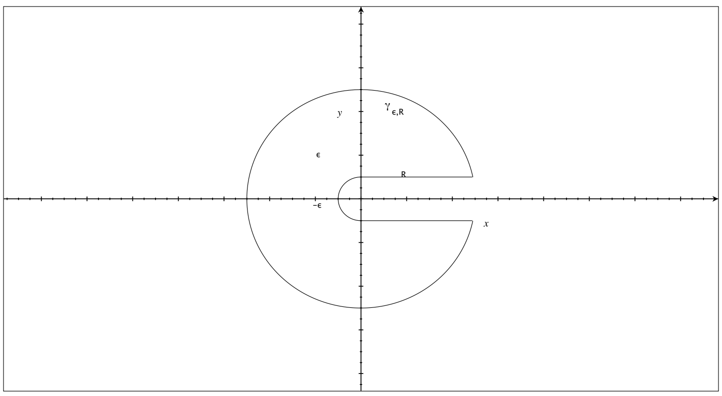
   (b) Per considerare le convergenze uniformi troviamo il massimo di ogni f_n su $\mathbf{R}$ (se esiste). Si ha: $f_n'(x) = \dfrac{n-2x}{n^2}$ che si annulla solo per $x = n/2$. è facile vedere che $n/2$ è punto di massimo per f_n che ha il grafico riportato in figura; si noti che il punto di massimo tende all'infinito e che il valore massimo è $f_n(n/2) = \dfrac{n^2/2 - n^2/4}{n^2} = 1/4$.



   Dato che $n/2$ è fuori dall'intervallo $[0,1]$ per $n \geq 3$, allora da $n = 3$ in poi si ha $\|f_n|\|_{\infty,[0,1]} = \max\limits_{0\leq x\leq 1} f_n(x) = f_n(1) = \frac{n-1}{n^2}$ che tende a zero per $n \to \infty$. Dunque f_n converge uniformemente (a zero) su $[0,1]$.

   (c) Per il punto precedente il punto di massimo di f_n su $[1,+\infty[$ si trova in $x = n/2$ e il massimo vale $1/4$. Dunque $\|f_n|\|_{\infty,[1,\infty[} = 1/4$ che non tende a zero. Quindi f_n non converge uniformente su $[1,+\infty[$.

2. Per fare l'integrale proposto conviene considerare il cammino $\gamma_{\epsilon,R}$ della figura e integrarci sopra la funzione $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}(4+z^2)}$, utilizzando la determinazione della radice: $\sqrt{\rho e^{i\theta}} := \sqrt{\rho}e^{\frac{i\theta}{2}}$ per $0 < \theta < 2\pi$ (dunque tale determinazione è olomorfa sull'insieme dei complessi privato della semiretta dei reali positivi).



Mandando ϵ a zero ed R all'infinito si deduce che

$$2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+x^2)}\,dx = 2\pi i \sum_{\text{tutti i poli}} Resf = 2\pi i \sum_{k=1,2} \frac{1}{\sqrt{z}}\frac{1}{2z}\Bigg|_{z=z_k}$$

dove z_k sono le radici di -4, cioè $z_1 = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_2 = -2i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$. Dunque

$$2\pi i \sum_{k=1,2} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{1}{2z}\Bigg|_{z=z_k} = \pi i \left(\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{1}{2e^{\frac{\pi}{2}i}} + \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}} \frac{1}{2e^{\frac{3\pi}{2}i}} \right) = \frac{\pi i}{2\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{3\pi}{4}i} + e^{-\frac{9\pi}{4}i} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{4} i \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} i \left(-\sqrt{2} i \right) = \frac{\pi}{2}$$

In definitiva l'integrale richiesto vale $\dfrac{\pi}{4}$.

3. Se cerchiamo la soluzione come serie di Fourier in soli seni (con valori nulli agli estremi dell'intervallo $[0,1]$), dobbiamo scrivere $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(k\pi t)$. Si ha allora $(-(k\pi)^2 + 4\pi^2) y_k = b_k$ dove b_k sono i coefficienti di Fourier della funzione $b(t) = t(1-t)$ sull'intervallo rispetto alle funzioni $\sin(k\pi t)$, cioè:

$$b_k = 2 \int_0^1 b(t) \sin(k\pi t)\, dt$$

e quindi, integrando due volte per parti :

$$\frac{b_k}{2} = \int_0^1 t(1-t) \sin(k\pi t)\, dt = \left[\frac{-\cos(k\pi t) t(1-t)}{k\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi} (1-2t)\, dt =$$

$$0 + \left[\frac{\sin(k\pi t)(1-2t)}{(k\pi)^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^2} 2\, dt = 0 + 0 + \left[\frac{-2\cos(k\pi t)}{(k\pi)^3} \right]_0^1 = \frac{2}{(k\pi)^3}(1 - (-1)^k)$$

In altri termini:

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi^3 k^3} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

La condizione $(-(k\pi)^2 + 4\pi^2) y_k = b_k$ scritta per $k = 2$ implica che $b_2 = 0$, ma questo è verificato, per quanto appena visto. Se ne deduce:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} \sin((2k-1)\pi t) + \bar{y} \sin(2\pi t) \qquad \bar{y} \in \mathrm{R}$$

4. Passiamo alle trasformate di Fourier. Se $b(t) = H(-t) e^{2t}$ si ha:

$$\hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(2-i\omega)t}\, dt = \left[\frac{e^{(2-i\omega)t}}{2 - i\omega} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2 - i\omega} = \frac{i}{\omega + 2i}$$

Dall'equazione e dalle proprietà della trasformata si deduce che

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{(-\omega^2 - 4i\omega + 4)} = \frac{i}{(\omega + 2i)(i\omega - 2)^2} = \frac{-i}{(\omega + 2i)^3}$$

Dunque $\hat{y}(\omega)$, come funzione complessa, ha solo il polo $-2i$ (triplo). Allora:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq 0 \\ -2\pi i \operatorname{Res}\left(\hat{y}(\omega) e^{i\omega t}, -2i \right) & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il residuo in $-2i$:

$$\mathrm{Res}\left(\hat{y}(\omega)e^{i\omega t}, -2i\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\omega^2}\left(-ie^{i\omega t}\right)\right]_{\omega=-2i} = \frac{-i}{2}\left[\frac{d}{d\omega}\left(ite^{i\omega t}\right)\right]_{\omega=-2i} =$$
$$\frac{-i}{2}\left[-t^2 e^{i\omega t}\right]_{\omega=-2i} = \frac{i}{2}t^2 e^{2t}$$

In definitiva, $y(t) = 0$ per $t \geq 0$ mentre $y(t) = \dfrac{t^2}{2}e^{2t}t$ per $t \leq 0$.
Volendo si può scrivere:

$$y(t) = H(-t)\left(\frac{t^2}{2}e^{2t}\right).$$