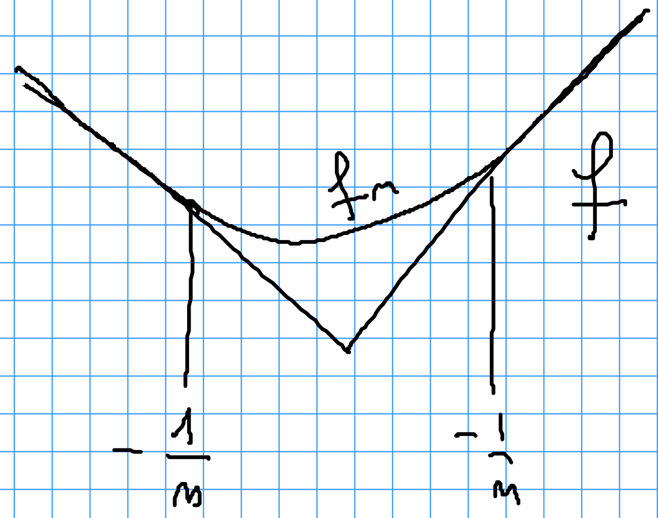
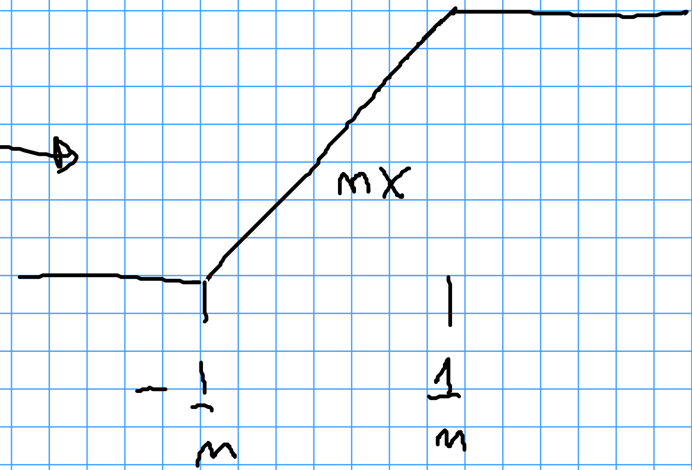
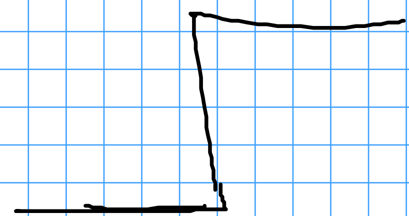


$f'_m \to$



$m \to +\infty$?!



$$f_m(x) = \frac{x}{1+m^2x^2} \qquad A = \mathbb{R}$$

Voglio studiare $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) = S(x)$

(1) Cominciamo con le $f_m(x)$

$f_m(x) \xrightarrow{m\to\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

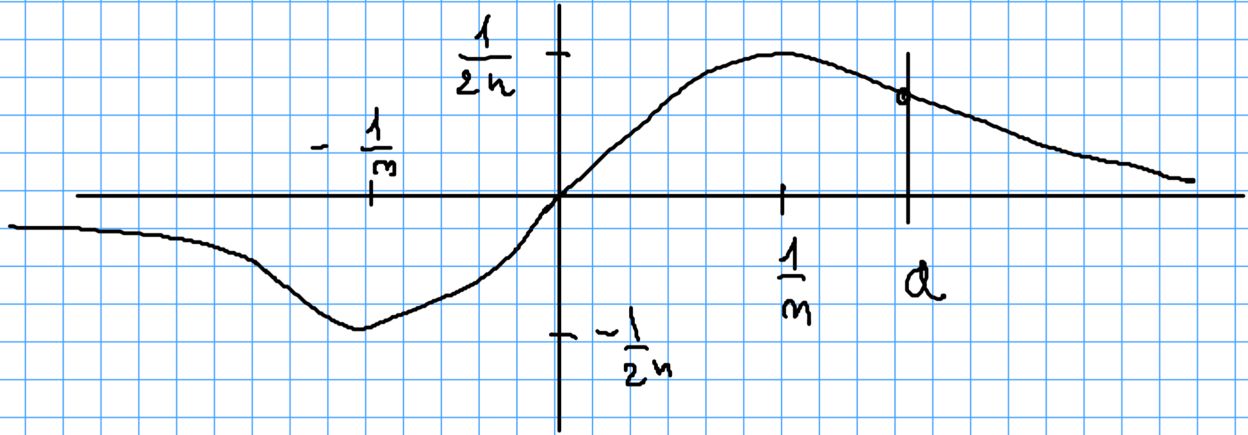
CONVERGENZA PUNTUALE

- se $x=0$ ovvio $f_m(0)=0 \quad \forall m$
- se $x \neq 0$ $1+m^2x^2 \to +\infty$ $\frac{1}{1+m^2x^2} \to 0$

STUDIAMO IL GRAFICO DI f_m ($m \geq 1$ fissato)

$\lim_{x\to\pm\infty} f_m(x) = 0$; $f_m'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x\,2n^2x}{(1+m^2x^2)^2} = \frac{1-m^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$

$f_m'(x)=0 \iff x = \pm\frac{1}{m}$; $f_m\left(\pm\frac{1}{m}\right) = \frac{\pm 1/m}{1+m^2\frac{1}{m^2}} = \pm\frac{1}{2n}$



$\|f_n\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \frac{1}{2n}$

DUNQUE $f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE.

(2) Passiamo alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

CONV. PUNTUALE $\to$ MI CHIEDO SE per X FISSATO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \quad \text{CONVERGE}$$

SÌ

— se $x = 0$ OVVIO

— se $x > 0$ $\quad \frac{x}{1+n^2x^2} \simeq \frac{1}{x}\frac{1}{n^2}$ e so che $\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

se faccio il rapporto $\dfrac{\frac{x}{1+n^2x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{n^2x}{1+n^2x^2} \to \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

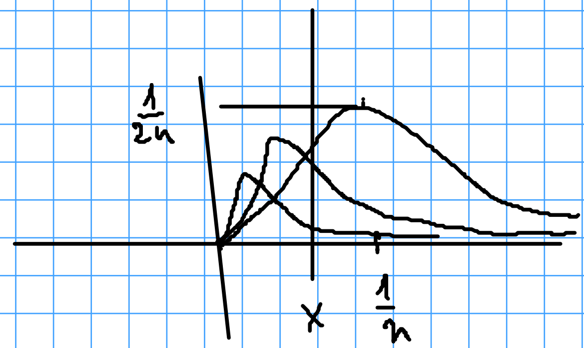
QUINDI CONV. PUNT. IN $\mathbb{R}$!

La presenza di $\frac{1}{x}$ fa sospettare che le cose vadano male vicino a zero!

CONVERGENZA UNIFORME?

CONV. TOTALE $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$?? $\left(\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n} \right)$

NO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ (serie armonica di esponente 1)



PROVIAMO A "SCANSARE ZERO" FISSO $a>0$ e considero la convergenza totale su $[a,+\infty[$

Se guardo il grafico di f_n vedo che per $n \geq a$

$$\max_{x\geq a} f_n(x) = f_n(a) = \frac{a}{1+n^2a^2} = \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \simeq \frac{1}{a}\frac{1}{n^2}$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} < +\infty$ (serie armonica $\sum \frac{1}{a}\frac{1}{n^2} < +\infty$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONV. TOTALMENTE su $[a, +\infty[$

$\Rightarrow$ CONV. UNIF. SU $[a, +\infty[$ $\Rightarrow$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

è continua su $[a, +\infty[$ (si può anche vedere che $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0$)

DATO CHE $a > 0$ è arbitrario, ricavo che $S(x)$ è continua

su $]0, +\infty[$ (NON IN ZERO)

SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE CHE $S(x)$ È DERIVABILE $\forall x > 0$

e che $S'(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)}_{2}$. Bisogna verificare che la

serie 2 È UNIF. CONV.

su $[a, +\infty[$ $\forall a > 0$

(calcolare $f_n'(x)$; fare $\max_{x \geq a} |f_n'| = \|f_n'\|_{\infty, [a, +\infty[}$, $\sum \|f_n'\|_{\infty, [a, +\infty[} <$

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\overline{R} = \frac{1}{\ell}$$

(1) se $|x| < \overline{R}$ applico il criterio della radice alla serie (numerica) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

TROVO $\sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow |x| \ell$

se $\underbrace{|x| \ell < 1}_{\Updownarrow}$ la serie dei moduli conv. $\Rightarrow$ la serie conv. ass.

$|x| < \frac{1}{\ell} = \overline{R}$

$f_n(x) = a_n x^n$

(2) Prendo $R < \overline{R}$, calcolo $\| f_n \|_{\infty, [-R,R]} = \max_{-R \le x \le R} |a_n x^n| = |a_n| R^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_{\infty, [-R,R]} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$$

Applico il criterio della radice, trovo

$$\sqrt[n]{|a_n| R^n} \longrightarrow \ell R \qquad \text{quindi} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [-R,R]} < +\infty$$

se $\ell R < 1$ $\left(\iff \ell < \frac{1}{R} \right)$ VERA perché $R < \bar{R} = \frac{1}{\ell}$

$< \ell \bar{R} = 1$

QUINDI LA SERIE DI POTENZE CONVERGE TOTALMENTE SU $[-R, R]$ (DUNQUE CONV. UNIF.)

(3) Lasciamo perdere

Derivata prima di una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \text{ suppongo che } \bar{R} > 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \ (\text{esiste e}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad -\bar{R} < x < \bar{R}$$

BASTA DIMOSTRARE CHE FISSATO $R < \bar{R}$

la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{k-1}$ CONV. UNIF. SU $[-R, R]$

Ma tale serie è un'altra serie di potenze, di raggio

$$\frac{1}{\ell_1} \quad \text{dove } \ell_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n n|} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{\bar{R}}} \ \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1} = \frac{1}{\bar{R}}$$

Il raggio della serie delle derivate è lo stesso della serie di potenze ... POSSO DERIVARE SOTTO IL SEGNO DI SERIE