Analisi di Fourier e alcune equazioni della fisica matematica [1]

OTTAVA Lezione

Serie di Fourier in soli seni o in soli coseni

Sviluppo di funzioni nulle agli estremi/con derivata nulla agli estremi

[1]prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Fissiamo $\boxed{L > 0}$ e poniamo $\boxed{\tilde{\omega} := \frac{\pi}{L}}$ – metà della frequenza angolare considerata finora.
Scriveremo L al posto di T e x al posto di t: la variabile ora sarà una variabile spaziale.
Dato $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathbf{s}_k(x) := \sin(\tilde{\omega} k x), \qquad \mathbf{c}_k(x) := \cos(\tilde{\omega} k x).$$

Notiamo che $\mathbf{s}_k(0) = \mathbf{s}_k(L) = 0$ mentre $\mathbf{c}_k'(0) = \mathbf{c}_k'(L) = 0$.

Definizione

Se $f : [0,L] \to \mathbb{C}$ *è una funzione definiamo per* $k \geq 1$

$$u_k := \frac{2}{T}\int_0^L f(x)\mathbf{s}_k(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(k\tilde{\omega}x)\,dx \tag{1}$$

Gli u_k *sono i coefficienti di Fourier di* f *rispetto ai seni; chiamiamo*

$$f_{s,n}(x) := \sum_{k=1}^{n} u_k\mathbf{s}_k(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k \sin(k\tilde{\omega}x)$$

il polinomio di Fourier di f *rispetto ai soli seni*

Definizione

Se $f : [0,L] \to \mathbb{C}$ *è una funzione definiamo*

$$v_0 = \frac{1}{T}\int_0^L f(x)\mathbf{c}_k(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\cos(k\tilde{\omega}x)\,dx$$

(v_0 *è la media di* f *su* $[0,L]$*), mentre per* $k \geq 1$*:*

$$v_k := \frac{2}{T}\int_0^L f(x)\mathbf{c}_k(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(k\tilde{\omega}x)\,dx \qquad (2)$$

I v_k *sono i coefficienti di Fourier di* f *rispetto ai coseni; chiamiamo*

$$f_{c,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} v_k\mathbf{c}_k(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k\cos(k\tilde{\omega}x)$$

il polinomio di Fourier di f *rispetto ai soli coseni*

Teorema

Se $f : [0,L] \to \mathbb{C}$ *è una funzione, se* x_0 *è un punto di* $]0,L[$ *tale che, per* $\delta > 0$

- f *è derivabile in* $]x_0 - \delta, x_0[$ *e in* $]x_0, x_0 + \delta[$,
- f' *è continua e limitata sia in* $]x_0 - \delta, x_0[$ *che in* $]x_0, x_0 + \delta[$;

allora

$$f_{s,n}(x) \to \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}, \qquad f_{c,n}(x) \to \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Inoltre, se f' *esiste continua e limitata, in* $]0,\delta[$, *allora*

$$f_{s,n}(0) \to 0, \quad f_{c,n}(0) \to f(0^+);$$

mentre se f' *esiste, continua e limitata, in* $]L-\delta, L[$, *allora*

$$f_{s,n}(L) \to 0, \quad f_{c,n}(L) \to f(L^-)$$

DIM

Con gli stessi ragionamenti si ha:

Teorema

Supponiamo che $f : [0,L] \to \mathbb{C}$ abbia derivata prima continua e che $f(0) = f(L) = 0$. Allora $f_{s,n} \to f$ uniformemente su $[0,L]$.
Supponiamo che $f : [0,L] \to \mathbb{C}$ abbia derivata prima continua, che $f(0) = f(L)$ e che $f'(0) = f'(L) = 0$. Allora $f_{c,n} \to f$ uniformemente su $[0,L]$.

Anche in questo caso possiamo ragionare al contrario: date due successioni $(u_n)_{n\geq 1}$ e $(v_n)_{n\geq 0}$ possiamo considerare

$$f_{s,n}(x) := \sum_{k=1}^{n} u_k \sin(k\tilde{\omega}x), \quad f_{c,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} u_k \cos(k\tilde{\omega}x)$$

e chiederci in che ipotesi sui coefficienti u_k/v_k tali serie convergano in un qualche senso. È chiaro che i risultati sono analoghi a quelli trovati nel caso periodico.

Teorema

- *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$, *allora* $f_{s,n} \xrightarrow{unif.} f$ *per una* f *continua e tale che* $f(0) = f(L) = 0$. *Inoltre per ogni* k $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(k\tilde{\omega}x)\,dx = u_k$.
- *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$, *allora* f *è anche derivabile,* f' *è continua ed è limite uniforme della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n' = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}u_n\mathbf{c}_n$.
- *In generale, per* $h \in \mathbb{N}$, *se* $\sum_{n=1}^{\infty} n^h|u_n| < +\infty$, *allora per* $j = 0,\dots,h$ *esiste la derivata* j*-esima* $f^{(j)}$ *continua e limite uniforme della serie delle derivate* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\mathbf{s}_n^{(j)}$ *(che è una serie di seni o di coseni a seconda che* j *sia pari o dispari).*
  Inoltre se $j = 0,\dots,h$ *e* j *è pari* $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(L) = 0$.

Teorema

- *Se* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |v_n| < +\infty$, *allora* $f_{c,n} \xrightarrow{unif.} f$ *per una* f *continua. Inoltre se* $k \geq 1$ $\frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\cos(k\tilde{\omega}x)\,dx = v_k$ *mentre* $\frac{1}{L}\int\limits_0^L f(x)\,dx = v_0$.
- *Se* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n|v_n| < +\infty$, *allora* f *è anche derivabile,* $f'(0) = f'(L) = 0$, f' *è continua ed è limite uniforme della serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n' = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}u_n\mathbf{s}_n$.
- *In generale, per* $h \in \mathbb{N}$, *se* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^h|v_n| < +\infty$, *allora per* $j = 0,\ldots,h$ *esiste la derivata j-esima* $f^{(j)}$ *continua e limite uniforme della serie delle derivate* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n\mathbf{c}_n^{(j)}$ *(che è una serie di coseni o seni a seconda che* j *sia pari o dispari).*
  Inoltre se $j = 0,\ldots,h$ *e* j *è dispari* $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(L) = 0$.

Anche nel caso delle serie di soli seni o soli coseni l'ambiente in cui si ottengono i risultati pi simmetrici quello delle funzioni a energia finita $L^2([0,L])$

Teorema

Sia f in $L^2([0,L])$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_{s,n}\|_2 = 0. \tag{3}$$

$$\int_0^L |f(t)|^2\, dt = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2. \tag{4}$$

La (4) *è l'eguaglianza di Parceval.*

Viceversa se (u_k) è una successione in $\mathbb{C}$ con $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty$ e se $f_{s,n}(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k \sin(k\tilde{\omega}t)$, allora esiste f in $L^2([0,L])$ tale che valgano (3) *e* (4)*.*

Inoltre per tale f vale $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(k\tilde{\omega}x)\, dx = u_k$ per ogni k.

Teorema

Sia f in $L^2([0,L])$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_{c,n}\|_2 = 0. \tag{5}$$

$$\int_0^L |f(t)|^2\, dt = Lv_0^2 + \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |v_n|^2 \tag{6}$$

Viceversa se (v_k) ùna successione in $\mathbb{C}$ con $\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2 < +\infty$ e se $f_{c,n}(t) := \sum_{k=0}^{n} v_k \sin(k\tilde{\omega}t)$, allora esiste una f in $L^2([0,L])$ tale che valgano (5) *e* (6).

Infine per tale f vale $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(k\tilde{\omega}x)\,dx = v_k$ per ogni $k \geq 1$ e $\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = v_0$

Applichiamo le serie di Fourier in soli seni per studiare il problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, L], \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \qquad (P_f)$$

al variare del parametro reale λ e del termine noto $f(x)$.

DISCUSSIONE