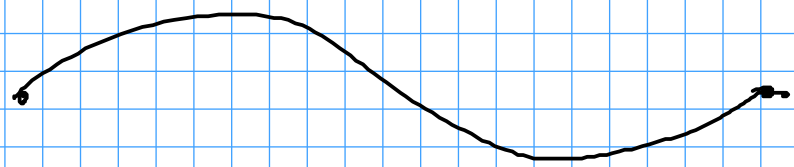
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(0,x) = v_0(x) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

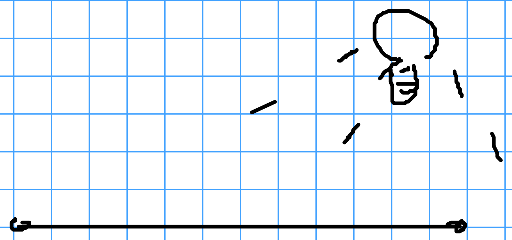


$$\dots \to \quad u(t,x) = g(x+tc) + g(x-tc)$$

Esempio (EQ. CALORE) NON OMOGENEO

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + K \qquad K \text{ costante}$$

IRRAGGIAMENTO COSTANTE (sia nel tempo che nello spazio)



Rifaccio gli stessi calcoli

$$\omega = \frac{\pi}{L}$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(n\omega x)$$

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x)$$

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\omega x) \leftarrow \text{devo calcolare gli } f_n$$

$$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L K \sin(n\omega x)\,dx = \frac{2K}{L}\left[-\frac{\cos(n\omega x)}{n\omega}\right]_0^L =$$

$$\frac{2K}{L\,n\omega}\left(-\cos(n\omega L) + \cos(0)\right) = \frac{2K}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) =$$

$$\frac{2K}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \dfrac{4K}{\pi}\dfrac{1}{n} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

COME NEI CALCOLI GIÀ VISTI TROVO

$$u_n' = -n^2\omega^2 u_n + f_n \,, \quad u_n(0) = A_n$$

$$\Rightarrow \quad u_m(t) = \alpha_m \, e^{-m^2\omega^2 t} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol. particolare}}}{\bar{u}_m(t)}$$

Posso cercare $\bar{u}_m(t) = \gamma$ (costante), $\Rightarrow$

$$0 = -m^2\omega^2\gamma + f_m \iff \gamma = \frac{f_m}{m^2\omega^2} \Rightarrow$$

$$u_m(t) = \alpha_m \, e^{-m^2\omega^2 t} + \frac{f_m}{m^2\omega^2} \quad ; \quad \text{IMPONGO } u_m(0) = A_m$$

$$A_m = \alpha_m + f_m/m^2\omega^2 \longleftrightarrow \alpha_m = A_n - f_m/m^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$u_m(t) = \left(A_n - \frac{f_m}{m^2\omega^2}\right) e^{-m^2\omega^2 t} + \frac{f_m}{n^2\omega^2} \quad ; \quad \text{passando alla serie}$$

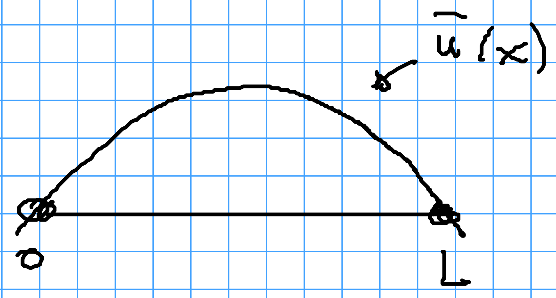
$$\boxed{u(t,x) = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \left(A_n - \frac{f_n}{m^2\omega^2}\right) e^{-m^2\omega^2 t} \sin(m\omega x)}_{\text{sol. dell' "OMOGENEA"}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_m}{m^2\omega^2} \sin(m\omega x)}_{\bar{u}(x)}}$$

$\bar{u}(x)$ RISOLVE L'EQ. ED È INDIPENDENTE DA t

(se scelgo $u_0 = \bar{u}$ allora $u(t,x) = \bar{u}(x)$)

$\Rightarrow$ $\bar{u}$ risolve $\quad 0 = \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + K$

$\dfrac{\partial}{\partial t}$



$$\begin{cases} \bar{u}'' = -K \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{u}(x) = \alpha (x - L/2)^2 + \beta \quad \Rightarrow \quad \bar{u}'' = 2\alpha = -K$$

$$-\frac{K}{2}(x - L/2)^2 + \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{K}{2}\frac{L^2}{4} = \frac{KL^2}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{u}(x) = \frac{KL^2}{8} - \frac{K}{2}(x - L/2)^2}$$

<u>NOTIAMO ANCHE CHE</u> se parto da $u_0(x)$ generico

$$u(t,x) \xrightarrow{t \to +\infty} \bar{u}(x)$$

SE INVECE DI K COSTANTE PRENDO $f(t,x) = f(x)$

COSTANTE NEL TEMPO, POSSO RIFARE LO STESSO RAGIONAM.

$$u(t,x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n - \frac{f_n}{n^2\omega^2}\right) e^{-n^2\omega^2 t} \sin(n\omega x)}_{u_0(t,x)\ \text{(sol. dell' omogenea)}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^2\omega^2} \sin(n\omega x)}_{\bar{u}(x)}$$

dove

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\omega x)$$

$\Rightarrow$ $\bar{u}(x)$ è la sol. di $\begin{cases} \bar{u}'' + f(x) = 0 \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \bar{u}(x) = A + Bx - \int_0^x \left(\int_0^{\xi} f(s)\, ds \right) d\xi$$

per opportuni A, B (in modo da verificare le cond al bordo)

Tale $\bar{u}$ è il "profilo limite" della distribuzione di temp. quando $t \to \infty$.

Passiamo a dei problemi in due dimensioni

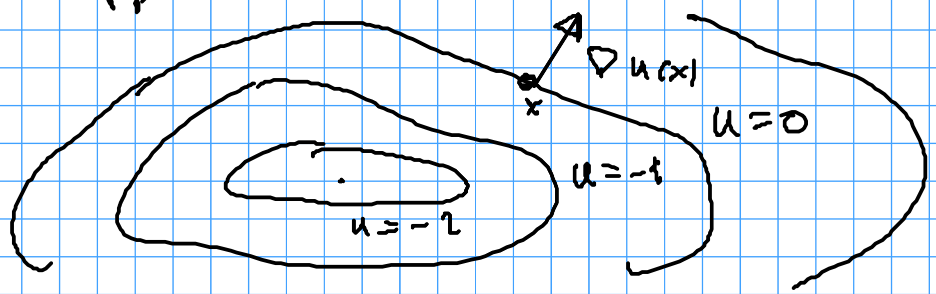
Alcuni elementi di calcolo differenziale in più variabili

se $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(N=2)$

il vettore $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \end{pmatrix}$ si indica con $\nabla u(x)$

e si chiama "gradiente" di u in x

Se rappresento le "linee di livello" di u



$(N=2)$

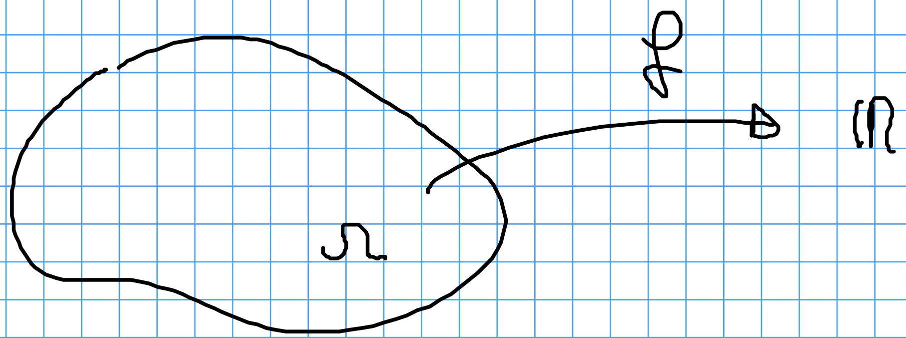
$\nabla u(x)$ è PERPENDICOLARE ALLA LINEA DI LIVELLO, DIRETTO NEL VERSO DI u CRESENTE

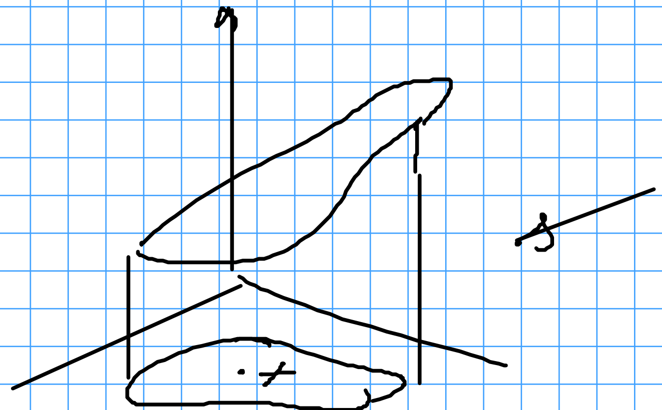
e ha modulo proporzionale a quanto cresce u in quella direzione — che è quella di MASSIMA CRESCITA DI u

NOZIONE DI INTEGRALE

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$

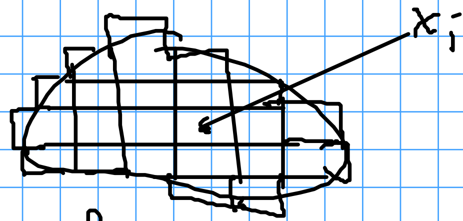




$\int_\Omega f(x)\,dx$

VOLUME DEL SOTTO GRAFICO

Per definirlo approssimo Ω con rettangoli R_j



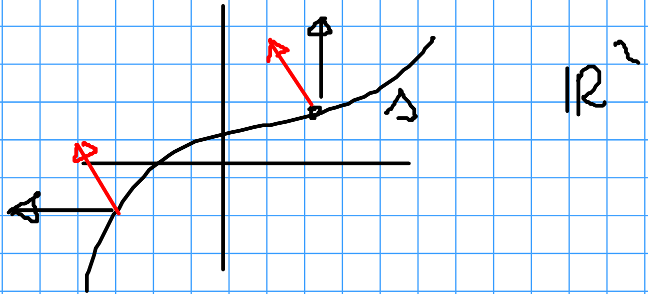
Su ogni rettangolo approssimo f con una costante $f(x_j)$

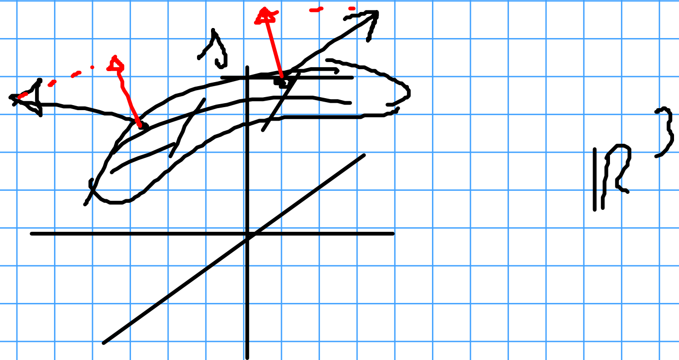
e somma $\sum \text{area}(R_j)\, f(x_j) \xrightarrow[|R_j| \to 0]{} \int_\Omega f(x)\,dx$

IN MODO SIMILE SI DEFINISCE UN "INTEGRALE CURVILINEO"

/ "DI SUPERFICIE"

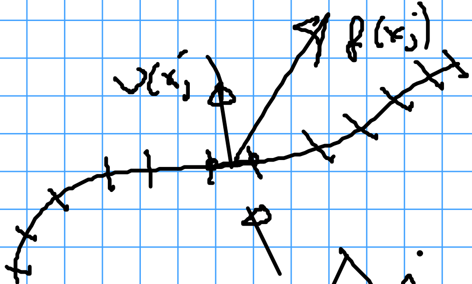
DATA UNA CURVA s IN $\mathbb{R}^2$ / UNA SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$





DATA UNA $\vec{f} : s \to \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ ($\vec{f}(x)$ è un vettore)

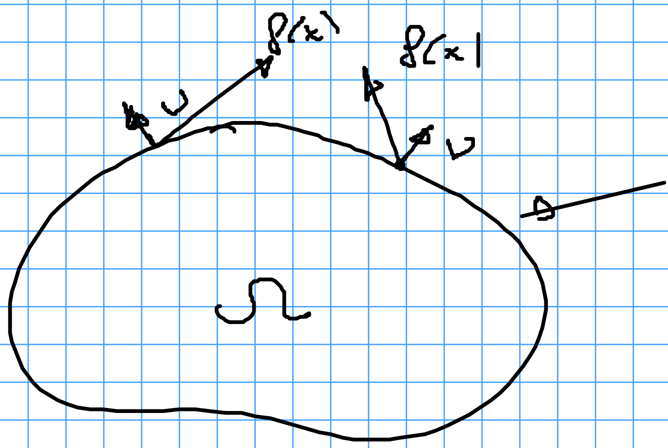
$$\int_s \vec{f}(x) \cdot \vec{\nu} \, ds = \text{limite di } \sum \vec{f}(x_j) \cdot \vec{\nu}(x_j) \cdot \Delta_j s$$



$\vec{\nu}(x_j)$ = normale unitaria alla curva in x_j

$\Delta_j s$ = lunghezza del tratto j-esimo

Nel caso in cui s è il bordo di Ω

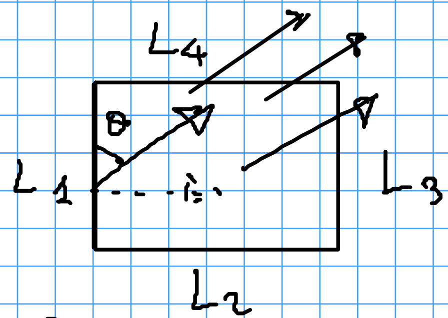


s = frontiera

ν = normale unitaria "ESTERNA"

$$\int_s \vec{f}(x) \cdot \vec{\nu}(x)\, ds = \text{"flusso di } \vec{f}\text{" attraverso } s$$

NEL CASO IN CUI Ω =



e $\vec{f}$ è costante il flusso è

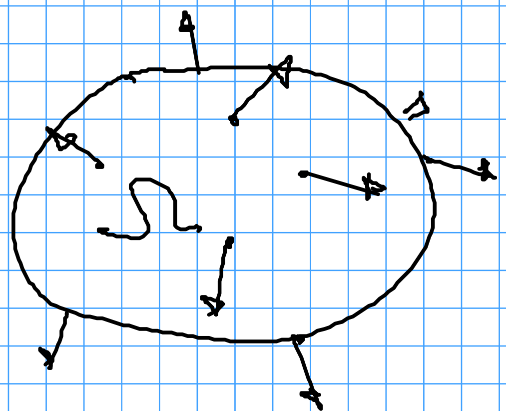
$$\sum \int_{L_i} f(x) \cdot \nu \cdot ds \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

e $\int_{L_1} \vec{f} = L_1 \cdot |f| \cdot \sin(\theta)$

Teorema (della divergenza - di Gauss - Green)

DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$. DATO UN CAMPO VETTORIALE su Ω

$$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$$



Chiamo $s = \partial\Omega$ = frontiera

Definisco DIVERGENZA di $\vec{f}$ $(N = 2/3)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \mathrm{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}$$

VALE

$$\boxed{\int_\Omega \mathrm{div}(\vec{f}(x))\, dx = \int_s \vec{f}(\sigma)\, \vec{\nu}(\sigma)\, d\sigma}$$

NOTA IN $N = 1$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$s = \{a, b\}$$

Ricaviamo l'eq. del calore in 2/3 dimensioni con gli stessi "principi" del caso $N=1$

- $q(x) =$ densità di calore

$$q(x) = c(x)\,\sigma(x)\,u(x)$$

capacità termica, densità, temperatura

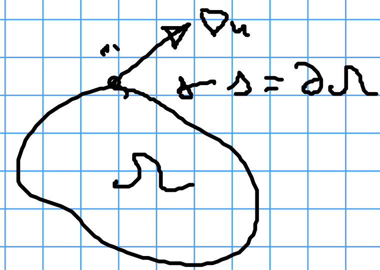
calore contenuto in Ω

Se prendo una regione Ω $\quad Q(\Omega) = \int_\Omega q(x)\,dx$

Assumiamo σ e c costanti

- Il calore segue l'opposto del gradiente della temperatura

Dato una regione Ω



$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} Q(\Omega) = K \int_{s} \nabla u \cdot \vec{v}\, ds}$$

$$\left(\nabla = \nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial}{\partial x_N}\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega c\sigma\, u(t,x)\,dx = K\int_{\partial\Omega} \nabla u(t,x)\cdot\nu\, d\sigma$$

|| (si fa ...) || (teorema della div.)

$$\int_\Omega c\sigma \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\,dx \quad\Bigg\}\quad K\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u(t,x))\,dx$$

$\Rightarrow$ per ogni regione Ω

$$\int_\Omega \left(c\sigma\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - K\operatorname{div}(\nabla u(t,x))\right)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c\sigma\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = K\operatorname{div}(\nabla u)(t,x)$$

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}u + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}u + \dots + \frac{\partial}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial x_N}u =: \Delta u$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u \quad (N=2)$$

OPERATORE DI LAPLACE

ALLA FINE

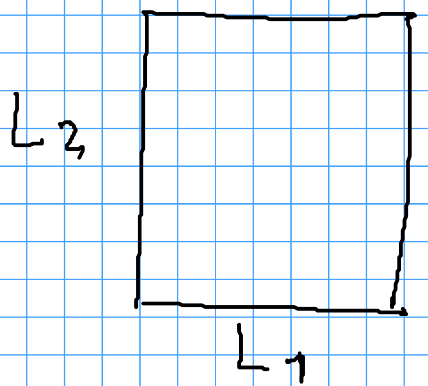
$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = c\,\Delta u(t,x) & x \in \Omega \qquad t>0 \\[2ex] u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \quad \left(\begin{array}{l}\text{condizione}\\ \text{iniziale}\end{array}\right) \\[2ex] (*)\ u(t,x) = 0 & t>0\,,\quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Caso "Ω IMMERSO NEL GHIACCIO"

se volessi il caso senza scambio di calore, al posto di $(*)$

$$(**)\qquad \nabla u(x)\,\nu(x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

Posso studiare l'eq. (E) se Ω è un rettangolo IN $\mathbb{R}^2$



$\longleftarrow \Omega$

variabili spaziali

$$u(t, \overbrace{x, y})$$

$$0 \leq x \leq L_1 \quad , \quad 0 \leq y \leq L_2$$

$$\Delta u(t, x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$$

<u>CERCO</u> $\quad u(t, x, y) = \sum_{n,m} u_{nm}(t) \sin(n \omega_1 x) \sin(m \omega_2 y)$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L_1} \qquad \omega_2 = \frac{\pi}{L_2}$$

(Le condizioni al bordo sono "automatiche")

SE RAGIONO FORMALMENTE

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n,m} u'_{nm}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

sommo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \sum_{n,m} u_{nm}(t)\left(-n^2\omega_1^2\right) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sum_{n,m} u_{nm}(t)\left(-m^2\omega_2^2\right) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

$$\Longrightarrow \quad u'_{nm}(t) = -\left(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2\right) u_{n,m}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{u_{nm}(t) = A_{n,m} e^{-\left(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2\right)t}}$$

dove $u_0(x,y) = \sum_{n,m} A_{n,m} \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$

(poi si giustifica tutto come per N=1)

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x,y) = \sum_{n,m} e^{-\left(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2\right)t} \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)}$$