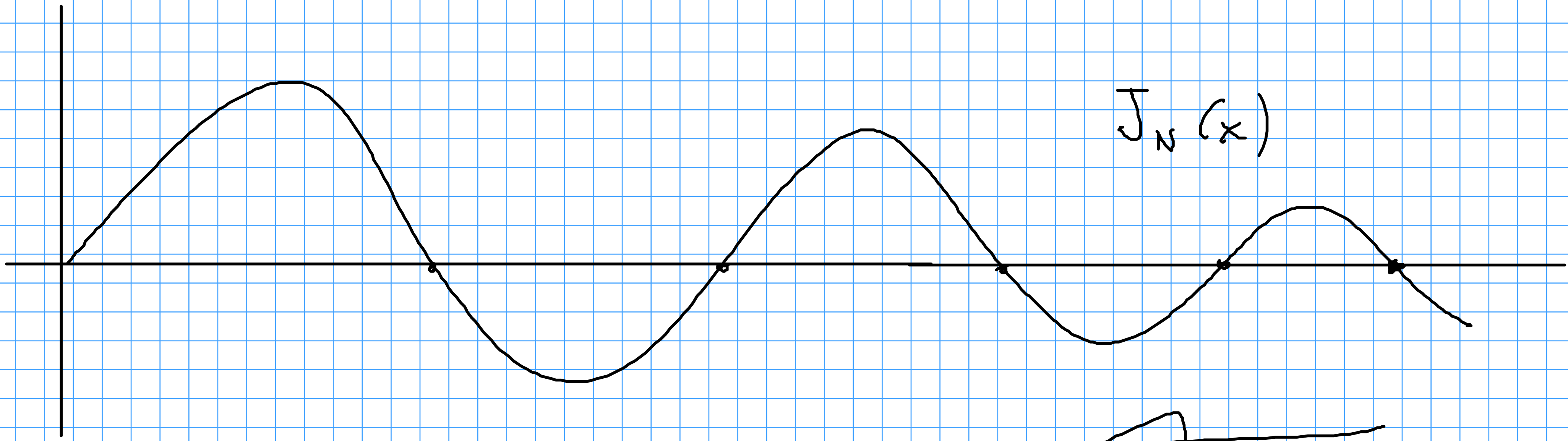
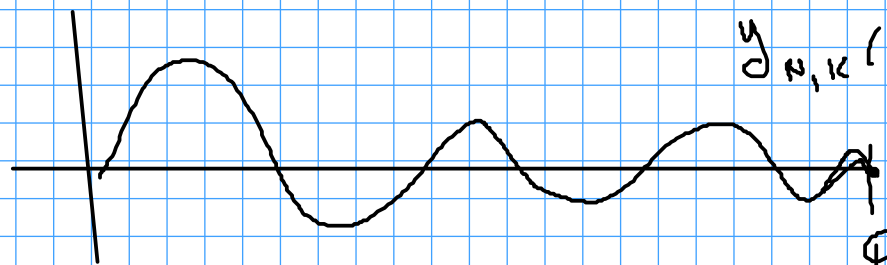
FISSO N FISSO $k > 0$ (INTERO) FISSO $R > 0$





$$y_{N,k}(x) = J_N\left(\frac{z_{N,k}}{R}\,x\right)$$

$$\mu = \frac{z_{N,k}}{R}$$

chiamo $\quad y(x) = y_{N,k}(x) = J_N(\mu x)$

$y'(x) = J_N'(\mu x)\cdot\mu \qquad y''(x) = J_N''(\mu x)\cdot\mu^2$

$$\boxed{x^2 y'' + x y' + (\mu^2 x^2 - N^2) y = 0}$$

$$x^2 \mu^2 J_N''(\mu x) + x \mu J_N'(\mu x) + (\mu^2 x^2 - N^2) J_N(\mu x)$$

Prendo $y = \mu x$ $\Rightarrow$

$$y^2 J_N''(y) + y J_N'(y) + (y^2 - N^2) J_N(y) = 0$$

$$\boxed{x^2 y'' + x y' - N^2 y} = -\mu^2 y$$

$$\mathcal{L}(y) = -\mu^2 y$$

y è una autofunzione di

$$\mathcal{L}(y) = x^2 y'' + x y' - N^2 y$$

CON CONDIZIONE $y(R) = 0$

$-\mu^2$ AUTOVALORE DI $\mathcal{L}$.

y_K è soluzione di

$$\begin{cases} x^2 y'' + x\, y' - N^2 y = \lambda_K x^2 y & (E) \\ y(R) = 0 \end{cases} \qquad \lambda_K = -\mu_K^2 = \ldots$$

OSS. L'equazione si può scrivere

$$x\, y'' + y' - \frac{N^2}{x}\, y = \lambda_K x\, y$$

$$\begin{cases} (x\, y')' - \dfrac{N^2}{x}\, y = \lambda_K\, x\, y_K & (E_K) \\ y(R) = 0 \end{cases}$$

Prendo y_K e y_h con $h \neq K \Rightarrow \lambda_K \neq \lambda_h$

Moltiplico l'equazione (E_K) per y_h e integro tra 0 e R

$$\int_0^R (x\, y_K')'\, y_h\, dx - \int_0^R \frac{N^2}{x}\, y_K\, y_h\, dx = \lambda_K \int_0^R x\, y_K\, y_h$$

INTEGRO PER PARTI

$$\underbrace{\left[x y_k' y_h \right]_0^R}_{=0} - \int_0^R x y_k' y_h' dx - \int_0^R \frac{N^2}{x} y_k y_h dx = \lambda_k \int_0^R x y_k y_h dx$$

$= 0$ $\quad y_h(R) = 0$, IN ZERO C'E' X

$$\Rightarrow -\int_0^R x y_k' y_h' dx - \int \frac{N^2}{x} y_k y_h dx = \lambda_k \int_0^R x y_k y_h dx$$

Se scambio h e k trovo

DEVONO ESSERE EGUALI

$$-\int_0^R x y_k' y_h' dx - \int_0^R \frac{N^2}{x} y_k y_h dx = \lambda_h \int_0^R x y_k y_h dx$$

$$\Rightarrow \text{dato da } \lambda_k \neq \lambda_h \qquad \int_0^R x y_k y_h dx = 0$$

NOTA CHE, USANDO $k = h$

$$-\int_0^R x (y_k')^2 dx - \int_0^R \frac{N}{x} (y_k)^2 = -\mu_k^2 \boxed{\int_0^R x y_k^2}$$

" $\|v\|^2 = v \cdot v$ " $\quad \sim$ NORMA DI y_k al quadrato

SERIE DI FOURIER.

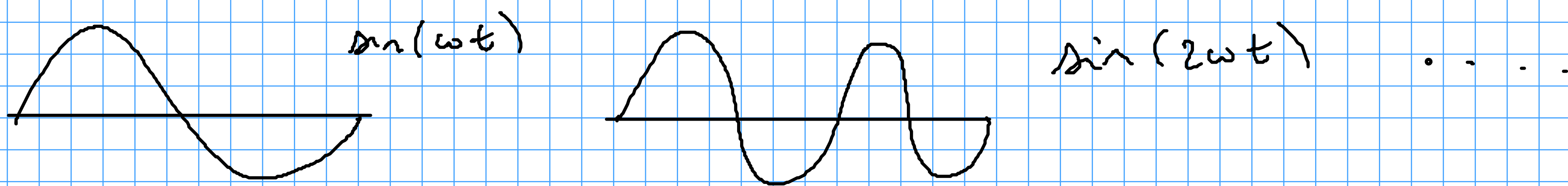
Dato $T > 0$ (periodo) chiamo $\omega = \frac{2\pi}{T}$

(frequenza angolare)

f PERIODICA DI PERIODO T $\left(f(t+T) = f(t) \quad \forall t \right)$

IDEA scrivere $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)$

T - PERIODICHE



PER VARI MOTIVI <u>PARTIAMO</u> CON IL "CASO COMPLESSO"

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T periodica e cerco di sviluppo:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \underset{(DEF)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t}$$

OSS. 1 STO STUDIANDO DELLE SERIE DI POTENZE SUL "BORDO"

$$e^{in\omega t} = (e^{i\omega t})^n$$

OSS. 2 Se chiamo $e_n(t) = e^{in\omega t}$ si ha

$$\int_0^T e_n(t) \overline{e_m(t)} \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ T & \text{se } n = m \end{cases}$$

(e_n ed e_m sono "ortogonali" rispetto a $u \cdot v := \int_0^T u(t)\overline{v(t)}\,dt$)

DIM. $n \neq m$

$$\int_0^T e^{in\omega t} \overline{e^{im\omega t}} \, dt = \int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt =$$

$$\left(\text{RICORDIAMO CHE } e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \right)$$

$$\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$$

$$= \int_0^T e^{i\omega t(n-m)}\,dt = \left[\frac{e^{i\omega t\overbrace{(n-m)}^{\text{INTERO}}}}{i\omega(n-m)} \right]_0^T = 0$$

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cancel{T}(n-m)} \Big|_{t=T} \cdots = 1 \right)$$

T- periodico $\Rightarrow$ HA GLI STESSI VALORI (cioè 1) in T e in 0

Se $n = m$

$$\int_0^T e^{in\omega t}\, e^{-in\omega t}\,dt = \int_0^T e^0\,dt = T$$

(la "norma" di $e_n = \sqrt{T}$)

TORNIAMO AL PROBLEMA $\circledast$ $\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n(t)}$ #

FACCIAMO DEI CALCOLI "FORMALI"

MOLTIPLICHIAMO (*) PER $\overline{e_k(t)}$ e integriamo tra 0 e T

$$\int_0^T f(t)\,\overline{e_k(t)}\,dt = \int_0^T \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e_m(t)\right) \overline{e_k}(t)\,dt \overset{(\sim)}{=}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int_0^T e_m(t)\overline{e_k}\,dt = c_k T$$

tutti nulli tranne che per $m=k$

NE RICAVO

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{e_k}(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-im\omega t}\,dt$$

DEFINIZIONE Data f $\forall k\in\mathbb{Z}$ chiamo coefficiente di Fourier k-esimo

$$c_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-im\omega t}\,dt$$

e chiamo polinomio di Fourier di ordine K

$$f_K(t) := \sum_{m=-K}^{K} c_m e_m(t)$$

PROBLEMA per $k \to +\infty$ posso dire che $f_k \to f$,

IN CHE SENSO ?

COME SI COMPORTANO LE DERIVATE DI f

IL PROBLEMA È DIFFICILE — NON BASTA LA CONTINUITÀ DI f a garantire la convergenza (nemmeno puntuale).

TEOREMA (Difficile) Esistono "molte" funzioni f continue tali che $f_k(x) \not\to f(x)$ in NESSUNA x.