ANALISI 1 [1]
QUATTORDICESIMA LEZIONE
Significato geometrico della derivata seconda
Convessità

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I, sia x_0 un punto di I e supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0. Supponiamo anche (per un momento) che

$$f(x_0) = f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0.$$

Proprietà

Posto $R := \dfrac{1}{f''(x_0)}$ *si ha:*

- *se $r < R$ la circonferenza di centro (x_0, r) e raggio r sta sopra il grafico di f – almeno per quanto riguarda i punti di ascissa x con x vicino a x_0;*
- *se $r > R$ la circonferenza di centro (x_0, r) e raggio r sta sotto il grafico di f – almeno per quanto riguarda i punti di ascissa x con x vicino a x_0;*

DIM

Notiamo che tutte le circonferenze di centro (x_0, r) e raggio r passano per $(x_0, 0)$ e hanno tangente orizzontale in tale punto;
dunque tali circonferenza sono tangenti al grafico di f in $(x_0, 0)$.

INOLTRE

- Se $f''(x_0) < 0$ vale un discorso analogo al precedente, con la differenza che il centro della circonferenza (che è sempre (x_0, r)) sta sotto il grafico di f.
- Se invece $f''(x_0) = 0$ allora comunque scelto $r > 0$ reale la circonferenza $(y-r)^2 + (x-x_0)^2 = r^2$, nei punti di ascissa vicina a x_0, si trova sopra il grafico di f se $r > 0$ (sotto il grafico di f se $r < 0$)

ESEMPI

Definizione

Il numero $R := \dfrac{1}{f''(x_0)}$ *(eventualmente negativo, infinito se* $f''(x_0) = 0$*) si chiama* *raggio di curvatura* *o* *raggio del cerchio osculatore* *per il grafico di* f *nel punto* $(x_0, 0)$ *– ricordiamo che stiamo supponendo* $f'(x_0) = 0$.

Nel caso in cui $f'(x_0) \neq 0$ si possono fare dei calcoli analoghi DIM e si perviene alla seguente definizione più generale.

Definizione

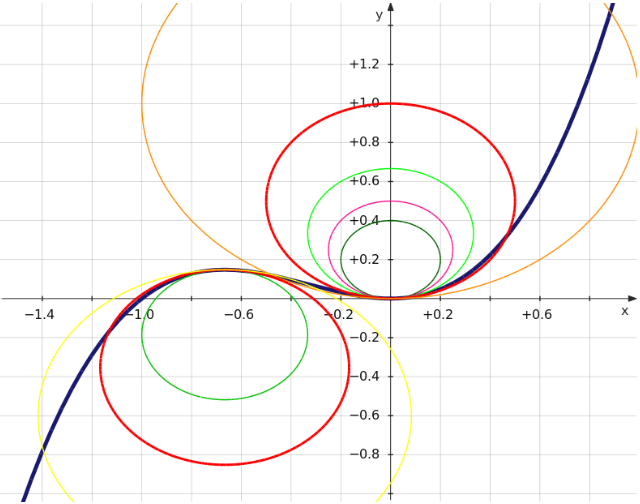
Data f derivabile due volte in un punto x_0 si chiama raggio di curvatura nel punto x_0 il numero R (eventualmente negativo o anche infinito) definito da

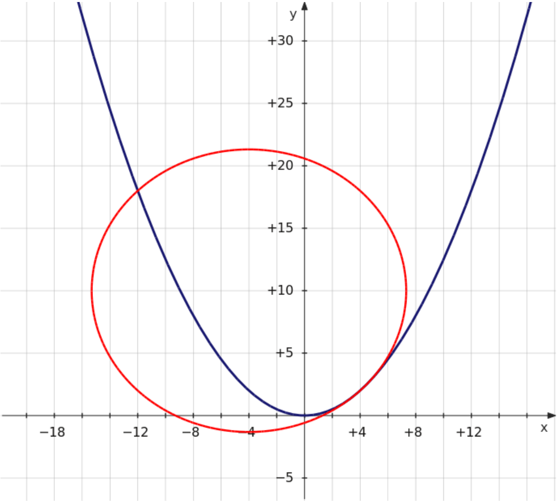
$$R := \frac{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$$

e si chiama cerchio osculatore per il grafico di f nel punto $(x_0, 0)$ il cerchio

$$\left(x - x_0 + \frac{Rf'(x_0)}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}}\right)^2 + \left(y - f(x_0) - \frac{R}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}}\right)^2 \leq R^2$$

Il cerchio osculatore, che ha raggio R (se $R \in \mathbb{R}$), è centrato nel punto $\left(x_0 - \frac{Rf'(x_0)}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}}, f(x_0) + \frac{R}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}}\right)$ e ha proprietà analoghe a quelle del caso $f'(x_0) = 0$.


y
+1.2
+1.0
+0.8
+0.6
+0.4
+0.2
−1.4
−1.0
−0.6
−0.2
+0.2
+0.6
x
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8



$$f(x) = \frac{x^2}{8}, x_0 = 4, f(x_0) = 2, R = 8\sqrt{2}, \text{centro} = (-4, 10)$$

Insiemi convessi

Definizione

Dati due punti P e Q in $\mathbb{R}^N$ (per esempio nel piano) chiamiamo segmento congiungente P a Q la funzione

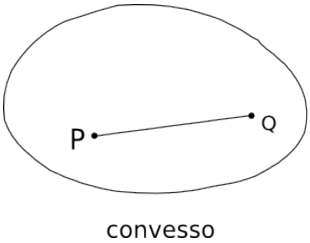
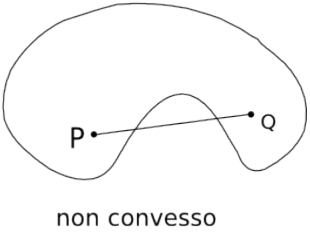
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N \qquad \gamma(t) = P + t(Q-P) = tQ + (1-t)P \quad \forall t \in [0,1]$$

Ci si rende facilmente conto che al variare di t tra 0 e 1 la $\gamma(t)$ descrive tutti i punti della retta tra P e Q, compresi tra i due.

Definizione

Dato un insieme A di $\mathbb{R}^N$ si dice che A è convesso se counque presi P e Q in A il segmento tra P e Q è interamente contenuto in A. In simboli:

$$tQ + (1-t)P \in A \qquad \forall P, Q \in A, \quad \forall t \in [0,1]$$


P
Q
convesso

P
Q
non convesso

Funzioni convesse

Definizione

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Chiamiamo epigrafico (o sopragrafico) di f l'insieme (del piano):

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$$

Definizione

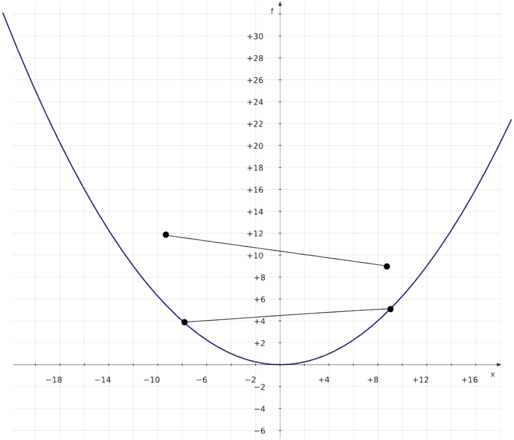
Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è convessa se $\mathrm{epi}(f)$ è convesso in $\mathbb{R}^2$. Diciamo che f è concava se $-f$ è convessa.

È abbastanza facile verificare che

Osservazione

$f : I \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se per ogni coppia di punti del grafico di f il segmento che congiunge tali punti è contenuto nell' epigrafico. In simboli:

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1) \qquad \forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0,1].$$



Esempio di funzione convesssa: $f(x) = \frac{x^2}{8}$

Proprietà dei rapporti incrementali

D'ora in poi I indica un intervallo in $\mathbb{R}$ e $\mathring{I}$ indica la parte interna di I, cioè I senza gli estremi.

Teorema

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$.
Per ogni x_0 in I consideriamo il rapporto incrementale rispetto a x_0:

$$\Delta_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} \qquad \Delta_{x_0}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Allora f è convessa se e solo se:

per ogni x_0 in I la funzione Δ_{x_0} è crescente su $I \setminus \{x_0\}$.

DIM

Regolarità delle funzioni convesse

Come conseguenza del teorema precedente si hanno i fatti seguenti. Ricordiamo le nozioni di derivata sinistra e destra:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Teorema

Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è convessa si ha:

1. *per ogni x_0 di $I \setminus \sup I$ esiste la derivata destra $f'_+(x_0)$; inoltre f'_+ è crescente su $I \setminus \sup I$;*
2. *per ogni x_0 di $I \setminus \inf I$ esiste la derivata sinistra $f'_-(x_0)$; inoltre f'_- è crescente su $I \setminus \inf I$;*
3. *se $x_0 \in \mathring{I}$ si ha:*
$$-\infty < f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) < +\infty$$
4. *per ogni x_0 di $\mathring{I}$ la funzione f è continua in I.*

Funzioni convesse derivabili

Teorema

Supponiamo che $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sia derivabili in* I.
Allora sono fatti equivalenti:

1. f *è convessa in* I*;*
2. f' *è crescente su* I*;*
3. *il grafico di* f *è sempre sopra il grafico della retta tangente a un qualunque punto del grafico: in simboli*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x, x_0 \in I.$$

DIM

Se f ha due derivate se ne deduce un altro teorema.

Teorema

Supponiamo che $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sia derivabile due volte in* I.
Allora f *è convessa in* I *se e solo se* $f''(x) \geq 0$ *per ogni* x *in* I.

Proprietà di minimo

Teorema

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa in I e se x_0 è un punto stazionario per f, allora f è un minimo assoluto per f.

DIM

In realtà vale una proprietà più forte.

Teorema

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa in I e se x_0 è un punto di minimo relativo f, allora f è un minimo assoluto per f.

DIM

Flessi

Definizione

Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{I}$ diciamo che x_0 è un ***flesso*** *per f se esiste $\delta > 0$ tale che*

- *f è convessa (concava) in $[x_0 - \delta, x_0]$,*
- *f è concava (convessa) in $[x_0, x_0 + \delta]$.*

Proprietà

1. *Se f è derivabile due volte e x_0 è un flesso, allora $f''(x_0) = 0$.*
2. *Se f è derivabile tre volte, se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, allora x_0 è un flesso per f.*

Proprietà

Se x_0 è un flesso per f allora la retta tangente al grafico di f nel punto x_0 "attraversa localmente" il grafico.