Dim (Condizione necessaria)

$\{a_n\}$ successione. $S_n := \overbrace{a_0 + a_1 + \dots a_{n-1}}^{S_{n-1}}, a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$S_n - S_{n-1} = a_n$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $S_n \to S$ $\quad S \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow S_{n-1} \to S$ (estratta da (S_n))

$$a_n = \underset{\downarrow \atop S}{S_n} - \underset{\downarrow \atop S}{S_{n-1}} \Rightarrow a_n \to 0$$

Esempio (1) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}$ CONVERGE ! (Somma = 1)

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{= b_n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{= b_{n+1}} \quad \left(= \frac{n+1-n}{n(n+1)} \quad \text{ok} \right)$$

$$\left(b_n = \frac{1}{n} \right)$$

$$S_n = \underbrace{a_1}_{b_1 - \cancel{b_2}} + \underbrace{a_2}_{\cancel{b_2} - \cancel{b_3}} + \dots + \underbrace{a_n}_{b_n - b_{n+1}} = b_1 - b_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - 0 = 1$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ DIVERGE

Mostriamo che NON CONVERGE $\Leftarrow \frac{n}{n+1} \to 1$

non vale la condizione necessaria

Il fatto che diverge segue dal fatto che $\frac{n}{n+1} \geq 0$ (VEDI DOPO)

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$$S_1 = a_1 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = -1 + 1 = 0$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$\vdots$$

$$S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

(a rigore ci vuole l'induzione)

$S_{2k} \to 0$, $S_{2k+1} \to -1$ $\Rightarrow \{S_n\}$ NON HA LIMITE

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ INDETERMINATA

Serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ dove $A \in \mathbb{R}$

Considero la somma parziale n-esima $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k = 1 + A + A^2 + \dots + A^n$

$A \neq 1$

$$= \frac{(A-1)}{(A-1)}\left(1 + A + A^2 + \dots + A^n\right) = \frac{1}{(A-1)}\left(\cancel{A} + \cancel{A^2} + A^3 + \dots A^{n+1} - 1 - \cancel{A} - \cancel{A^2} - \dots - A^n\right)$$

$$= \frac{A^{n+1} - 1}{A - 1} = \frac{1 - A^{n+1}}{1 - A}$$

. Mando $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } A > 1 \\ \dfrac{1}{1-A} & \text{se } -1 < A < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } A \leq -1 \end{cases}$$

SOMMA DELLA SERIE

$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ DIVERGE A $+\infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ CONVERGE

$\sum A^n$ IRREGOLARE

Se $A = 1$ $S_n = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n = n + 1 \to +\infty$

SIAMO STATI FORTUNATI!

ESEMPIO (criterio del confronto)

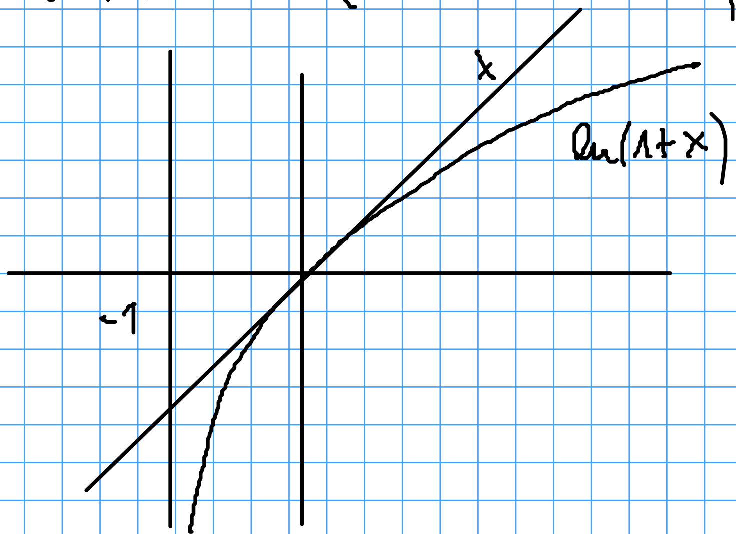
Abbiamo visto che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

Se dimostro che $\displaystyle\frac{1}{n} \geq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty}$

Posso dimostrare che $x \geq \ln(1+x)$ $\quad \forall x>0$

Quest'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\ln(1+x)$ è **CONCAVA**

$f(x) = \ln(1+x)$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\quad f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} < 0 \quad \forall x>0$



retta tangente in 0 $\quad (f'(0)=1,\ f(0)=0)$

$$x \geq \ln(1+x) \quad !!$$

Dm. (confronto asintotico) Caso $0 < \ell < +\infty$

So che $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$

Se $\ell > 0$, prendo $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ $\Rightarrow$ $\ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$

Applico la def. di limite $\Rightarrow \exists\, \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$

$$\frac{\ell}{2} = \ell - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \ell + \varepsilon = \frac{3}{2}\ell \iff$$

$$\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} \ell\, b_n \quad \text{definitivamente}$$

Posso applicare il teorema del confronto tra

$\frac{\ell}{2} b_n$ e a_n / a_n e $\frac{3}{2}\ell\, b_n$

Per es. se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ell}{2} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$ FINE

Esempi di applicazione del criterio del confronto asintotico.

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}$ $\qquad b_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

dato che $\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{\ln(1+1/n)}{1/n} \to 1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ hanno lo stesso carattere

So che la seconda diverge $\Rightarrow$ la prima diverge.

SE INVECE considero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 1$

$\alpha \to \beta$

$\Rightarrow$ $a_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$; PRENDO $b_n = (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}$

SAPPIAMO CHE $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge se $\underset{\neq 0}{1-\alpha < 0} \Leftrightarrow \alpha > 1$

CALCOLIAMO $\dfrac{b_n}{a_n}$ TROVIAMO

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \frac{n^{1-\alpha}}{n^{-\alpha}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1\right] =$$

$$n\left[\cancel{1} + (1-\alpha)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right] = 1-\alpha + o(1) \longrightarrow 1-\alpha \neq 0$$

Dunque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\iff$ $\boxed{\alpha > 1}$

Riassumendo la serie armonica di ordine α $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

converge se e solo se $\alpha > 1$