ANALISI 1 [1]

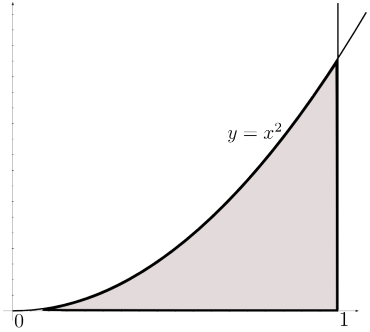
DICIOTTESIMA - DICIANNOVESIMA LEZIONE

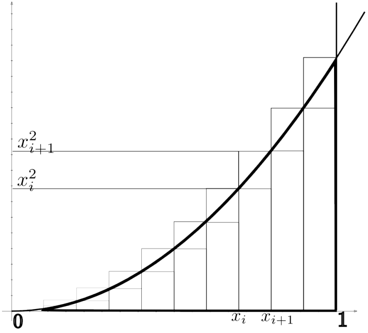
Integrale secondo Riemann

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Un esempio: l'area del segmento di parabola

Ci proponiamo di determinare "l'area" della regione di piano compresa tra l'asse delle x, la parabola $y = x^2$ e la retta verticale $x = 1$.





Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n sottointervalli $[x_i, x_{i+1}]$ di eguale ampiezza $\dfrac{1}{n}$ e costruiamo, come nella figura, i rettangoli di base $[x_i, x_{i+1}]$ e di altezza x_i^2 ("rettangoli inferiori") oppure di altezza x_{i+1}^2 ("rettangoli superiori").

Il “plurettangolo superiore” P''_n, risultante dall’unione di tutti i rettangoli superiori contiene la figura F di cui vogliamo calcolare l’area, mentre quest’ultima contiene il “plurirettangolo inferiore”, P'_n ottenuto mettendo insieme tutti i rettangoli inferiori.
Allora per ogni

$$Area(P'_n) \leq Area(F) \leq Area(P''_n)$$

D’altra parte

$$Area(P'_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6n^3}$$

$$Area(P''_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Dato che, per $n \to \infty$ si ha $Area(P'_n) \to \frac{1}{3}$ e $Area(P''_n) \to \frac{1}{3}$, se ne deduce (metodo di “esaustione”) che $\boxed{\text{l'area di } F \text{ deve essere } \frac{1}{3}}$.

Notiamo che in questo discorso **si suppone a priori** di sapere cosa è l’area e di conoscere alcune sue proprietà (per es. $A \subset B \Rightarrow Area(A) \leq Area(B)$).

Vogliamo ripetere questo procedimento *in generale*. Così facendo giungeremo a DEFINIRE cosa è l'area di certe (NON TUTTE) figure del piano.
In quanto segue prendiamo un **intervallo** $[a,b]$ di $\mathbb{R}$ e una **funzione limitata** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (nota che f non deve per forza essere continua).

Definizione

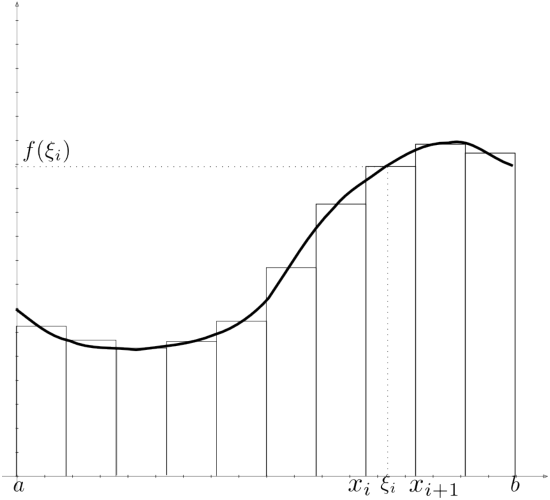
Dato un intero n dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n sottointervalli di eguale ampiezza $[x_i, x_{i+1}]$, dove:

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, \dots, n$$

e scegliamo (arbitrariamente) dei punti $\xi_1, \dots, \xi_n$ tali che

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \qquad i = 0, \dots, n-1.$$

Diremo che $$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)$$
*è una **somma di Cauchy-Riemann** di ordine n per f nell'intervallo $[a,b]$*



Somme di Cauchy-Riemann.

Definizione

Diremo che la funzione f ***è integrabile*** *su $[a,b]$ se per qualunque successione $\{S_n\}$ tale che S_n è una somma di Cauchy-Riemann di ordine n si ha che esiste finito*

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

e tale limite è lo stesso qualunque sia la successione.
Chiameremo ***integrale*** *di f su $[a,b]$ il limite S trovato sopra, che verrà indicato con*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f.$$

Osservazione

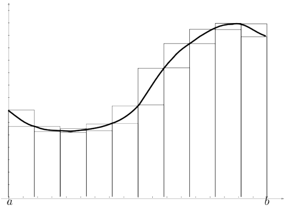
Se definiamo la somma inferiore (superiore) n-esima

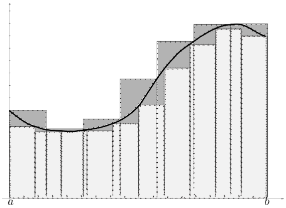
$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)\,(x_{i+1} - x_i) \qquad \left(S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)\,(x_{i+1} - x_i) \right)$$

allora ogni somma di Cauchy-Riemann S di ordine n verifica

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \le s_n \le S \le S_n \le (b-a)\sup_{[a,b]} f .$$

Inoltre $\boxed{s_n \le S_m \text{ per ogni } n, m \text{ interi}}$ IDEA DI DIM..





Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$$

dove S_n è la somma superiore n-esima e s_n è la somma inferiore n-esima. Inoltre, se il limite sopra fa zero si ha:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b f(x)\, dx.$$

DIM

Dunque, per quanto visto all'inizio, la funzione $x \mapsto x^2$ è integrabile sull'intervallo $[0, 1]$ e il suo integrale fa $\dfrac{1}{3}$.

Esempio (Area del triangolo)

La funzione $x \mapsto mx$ è integrabile su $[0,1]$ e il suo integrale fa $\dfrac{m}{2}$.

DIM

Proprietà

Se $\alpha > -1$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + o\left(n^{\alpha+1}\right)$$

DIM Se ne deduce una proprietà generale.

Esempio

Se $\alpha \geq 0$ la funzione $x \mapsto x^k$ è integrabile su $[0,1]$ e il suo integrale tra zero e uno fa $\dfrac{1}{\alpha+1}$

DIM Che succede per $\alpha \in]-1,0[$? In questo caso la funzione non è limitata (ricorreremo più avanti all'*integrale improprio*.)

Proprietà dell'integrale

Teorema (linearità)

Siano f e g due funzioni integrabili su $[a,b]$ e siano c,d due numeri reali. Allora $cf+dg$ è integrabile su $[a,b]$ e

$$\int_a^b (cf+dg)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema (additività rispetto all'intervallo)

Sia f una funzione integrabile su $[a,b]$ e sia r un numero con $a \leq r \leq a$. Allora f è integrabile su $[a,r]$ e su $[r,b]$ e si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^r f(x)\,dx + \int_r^b f(x)\,dx. \tag{add}$$

Proprietà dell'integrale

Convenzione Se $b < a$ conveniamo di porre

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Allora la formula (add) vale per qualunque terna di numeri a, b ed r.

Teorema (Monotonia)

Se f è integrabile su $[a,b]$ e se $f \geq 0$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

DIM

Notiamo che da quanto sopra si deduce che, se f, g sono integrabili:

$$f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Proprietà dell'integrale

Teorema (Prodotto)

Se f e g sono integrabili su $[a,b]$ allora il prodotto fg è integrabile su $[a,b]$.

Teorema (Composizione con una lipschitziana)

Se f è integrabile su $[a,b]$ e se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lipschitziana, cioè se per un'opportuna costante L

$$|G(y_1) - G(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

allora $G \circ f$ è integrabile su $[a,b]$.

Conseguenza Dato che $G(y) = |y|$, y^+ e y^- sono lipschiziane si deduce

$$f \text{ integrabile su } [a,b] \Rightarrow |f|, f^+, f^- \text{ integrabili su } [a,b]$$

Inoltre $$\pm \int_a^b f(x)\,dx = \pm \int_a^b f(x)^+\,dx \mp \int_a^b f(x)^-\,dx \leq$$
$$\int_a^b f(x)^+\,dx + \int_a^b f(x)^-\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ne segue che se f è integrabile su $[a,b]$ si ha:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}.$$

Classi di funzioni integrabili

Teorema (integrabilità delle monotone)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona, allora f è integrabile. DIM

Teorema (integrabilità delle continue)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile.

DIM. nel caso lipschitziano

Esempio (funzione non integrabile)

La funzione di Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è razionale}, \\ 1 & \text{se } x \text{ è irrazionale}, \end{cases}$$

non è integrabile su nessun intervallo $[a,b]$. Infatti per qualunque n si ha $s_n = 0$ e $S_n = b - a$ e quindi $S_n - s_n$ non tende a zero.

Teorema (della media)

Se f è integrabile su $[a,b]$ allora vale

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Ricordiamo che il numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

si chiama ***media integrale*** *di f in $[a,b]$.*
Se inoltre f è continua (e quindi l'integrabilità è automatica) allora esiste un punto intermedio ξ in $[a,b]$ in cui "f assume la sua media", cioè:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

DIM

Antiderivata

Definizione (primitive)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che un'altra funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f (o è un'antiderivata di f) se F è deivabile in $[a,b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Teorema

Supponiamo che f abbia una primitiva F. Allora l'insieme di tutte le primitive di f è individuato dalla formula:

$$F_1 \text{ primitiva di } f \Leftrightarrow F_1 = F + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

DIM

Notazione È uso indicare con il simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

(*integrale indefinito di f*) l'insieme di tutte le primitive di f.

Dunque se sappiamo che $F' = f$ (conosciamo una primitiva), si ha:

$$\int f(x)\,dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

(se f è definita su un intervallo !!). Per esempio:

$$\int 2x\,dx = \left\{x^2 + c : c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Teorema (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Supponiamo che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia continua e che $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia una primitiva di f (cioè che $F' = f$). Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \left(=: [F]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} \right)$$

DIM

Notiamo che per ora NON SAPPIAMO quali funzioni ammettano primitiva – vedremo poi che tutte le funzioni continue lo fanno.
Sappiamo però che, se troviamo esplicitamente una primitiva, allora siamo in grado di calcolare esplicitamente l'integrale "definito".

Esempio

Se $\alpha \geq 0$ la funzione $x \mapsto x^\alpha$ è continua e si ha (basta la verifica):

$$\int x^\alpha \, dx = \left\{ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c : c \in \mathbb{R} \right\}$$

da cui

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

È MOLTO PIÙ SEMPLICE COSÌ che ricavarlo dalla definizione di integrale.

Conviene allora fabbricarci una **tabella di primitive**.

Primitive notevoli

Funzione	Primitive	Funzione	Primitive
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\sinh(x)$	$\cosh(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\cosh(x)$	$\sinh(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh}(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh}(x) + c$

Andrebbe notato che la costante c “dipende dall’intervallo”.

Ricordiamo anche che

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Oltre alla "tabella delle primitive" abbiamo a disposizione i seguenti teoremi.

Teorema (Integrazione per sostituzione)

Sia $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia* $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ *derivabile con derivata continua. Allora*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

DIM

Teorema (Integrazione per parti)

Siano f, g, F, G *quattro funzioni continue definite sull'intervallo* $[a,b]$. *Supponiamo che*

$$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Allora

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

DIM