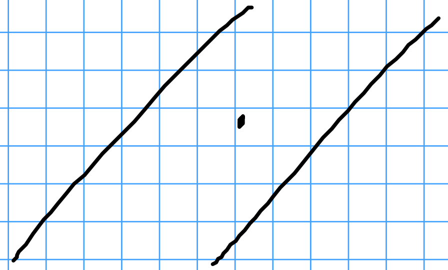
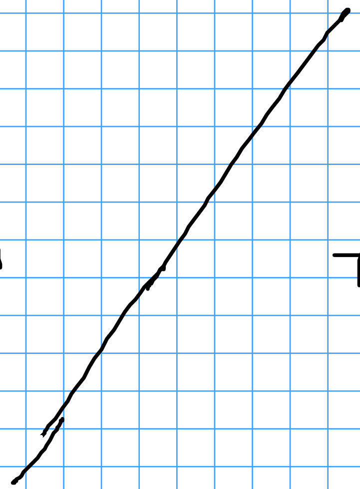
SONO ANCHE

CONTINUA + MONOTONA

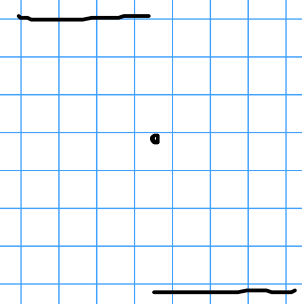
PER ES.



= SOMMA DI



+



Dim. INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE – CASO CRESCENTE

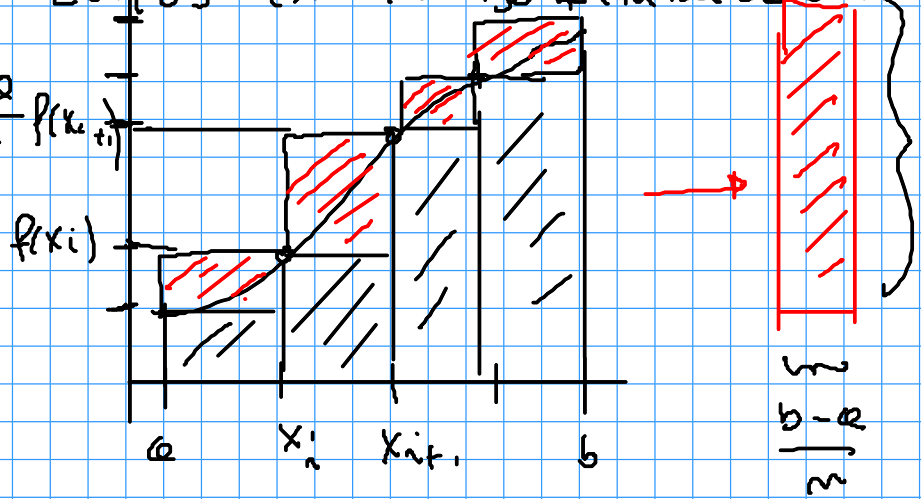
$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CRESCENTE.

Fisso $m \in \mathbb{N}$, divido $[a,b]$ in m sottointervalli $[x_i, x_{i+1}]$

con $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{m}$

$\forall\ i = 0, \dots, m-1$

$x_0 = a$, $x_m = b$



$f(b) - f(a)$

$$\min_{x_{i-1} \le x \le x_{i+1}} f(x) = f(x_i)$$

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) = f(x_{i+1})$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f(x_i) \qquad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{i+1})$$

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) = \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right)}_{f(b)-f(a)}$$

Somma di tutti gli "scarti verticali"

$$= \frac{(b-a)\left(f(b)-f(a)\right)}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

DUNQUE f è integrabile !!

---

f continua su $[a,b] \implies f$ integrabile su $[a,b]$

DIFFICILE – facciamo vedere che vale se f è lipschitziana:

(*) $$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \qquad \forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$$

Dim. Fisso $n \in \mathbb{N}$. Divido $[a,b]$ in n intervalli $[x_i, x_{i+1}]$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}. \qquad m_i = \min_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1}-x_i) \qquad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1}-x_i)$$

dato che f è continua trovo $\xi_i', \xi_i'' \in [x_i, x_{i+1}]$

tali che
$$m_i = f(\xi_i') \qquad M_i = f(\xi_i'')$$

$$(**)\quad M_i - m_i = |f(\xi_i'') - f(\xi_i')| \leq L|\xi_i'' - \xi_i'| \leq L\frac{(b-a)}{n}$$

(non c'è più l'indice i)

Allora $S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1}-x_i) \leq$ (per $(**)$)

$$\sum_{i=0}^{n-1} L\frac{(b-a)}{n}(x_{i+1}-x_i) = L\frac{(b-a)}{n}\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)}_{b-a} = \frac{L(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow f$ INTEGRABILE #

<u>NOTA</u> Quello che serve (che si può ottenere anche nel caso generale) è $M_i - m_i \leq \delta_n$ quantità INDIPENDENTE DA i, con $\delta_n \to 0$

$\sim$ continuità UNIFORME (non l'ho facciamo!)

OSSERVAZIONE

Se f è derivabile con derivata continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ f è lipschitziana su $[a,b]$.

Esempio di funzione non integrabile

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \quad (x \text{ razionale}) \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \quad (x \text{ irrazionale}) \end{cases}$$

RICORDIAMO CHE $\forall\, x < y$ $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ con $x < r < y$
$\exists\, j \notin \mathbb{Q}$ con $x < j < y$

Prendiamo n, dividiamo $[a,b]$ in n sottointervalli $[x_i, x_{i+1}]$

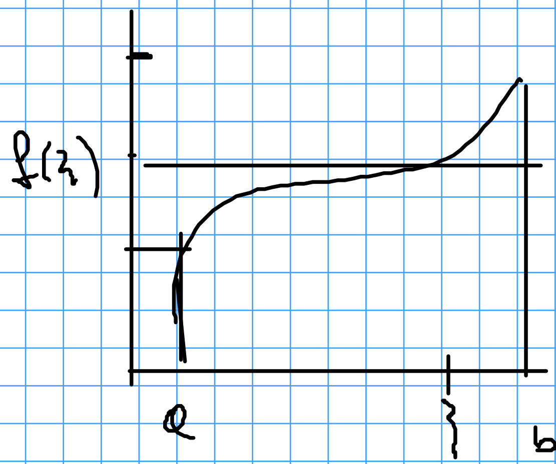
Fisso i. Trovo r razionale in $[x_i, x_{i+1}]$ $\Rightarrow$ $\sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1$

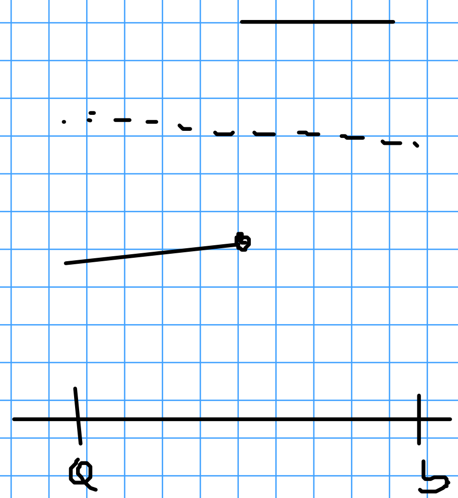
" " i irrazionale in $[x_i, x_{i+1}]$ $\Rightarrow$ $\inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = 0$

$s_n = 0$, $S_n = b - a$ qualunque sia n

$S_n - s_n \not\to 0$ $\Rightarrow$ f <u>non è</u> integrabile.

Teorema della media integrale





se f è discontinua non è detto che ξ esista

Dim.

$m = \inf_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{[a,b]} f(x)$. Allora

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

INTEGRANDO su $[a,b]$

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,f(x)\,dx = M(b-a)$$

DIVIDO PER $b-a$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Se f è continua la media risulta essere compresa tra

$$\min_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad \max_{[a,b]} f .$$

Per il teorema dei valori intermedi esiste ξ tale che $f(\xi) =$ "media"
#

Caratterizzazione delle primitive

(a) Se F è primitiva di f $\Rightarrow$ $F + c$ è primitiva (ovvio)

(b) $F_1, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono primitive di f $\Rightarrow$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F_1(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$.

<u>dim.</u> $H(x) = F_1(x) - F(x) \Rightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H$ è costante

(conseguenza del teorema di Lagrange: dati x e y in $[a,b]$ esiste t tra x e y

$$\frac{H(x) - H(y)}{x - y} = H'(t) = 0 \Rightarrow H(x) = H(a) = c \quad \forall x \quad)$$

$$\Rightarrow F_1(x) = F(x) + c$$

#

Teor fond. calcolo integrale

(BASTA l'ipotesi f integrabile, $F' = f$, F continua)

So che f continua su $[a,b]$ e che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Dato n divido $[a,b]$ in n sottointervalli $[x_i, x_{i+1}]$ ...

$$F(b) - F(a) =$$

$$F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) + \dots$$

$$+ F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x_{i+1} - x_i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}_{S_n}$$

per opportuni $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ (uso il teorema di Lagrange)

S_n è una somma di Cauchy-Riemann per f.

Dato che f è integrabile $S_n \to \int_a^b f(x)\,dx$. Quindi

$$F(b) - F(a) = S_n \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$ $\Rightarrow$ DEVE VALERE LA TESI

Potevamo trovare subito da se $\alpha > 0$

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

(se derivo $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ trovo $\frac{\alpha+1}{\alpha+1} x^\alpha = x^\alpha$!!)

(MOLTO PIÙ FACILE CHE APPLICARE LA DEFINIZIONE)

Esempi $\int \sin^2(x)\,dx$ / $\int \cos^2(x)\,dx$

Usando la trigonometria: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$= 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \iff$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \; ; \; \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sin(2x) + \text{cost} =$$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

DUE STRUMENTI: $\rightarrow$ INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE (derivata di $f \circ g$)

" " PER PARTI (derivata di $f \cdot g$)

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

"FORMALMENTE" $\quad x = \varphi(t) \quad$ "$dx \to \varphi'(t)\,dt$"

Dim. Supponiamo di sapere che f ha una primitiva F (lo vedremo più avanti)

(e quindi $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$)

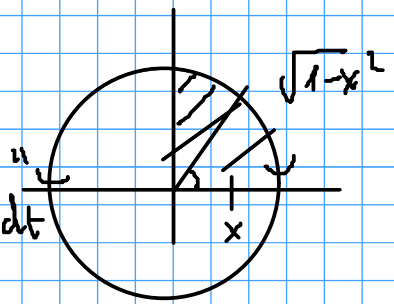
Considero $F \circ \varphi \Rightarrow (F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (derivata della funzione composta)

$= (f\circ\varphi)\varphi'$ Quindi $F\circ\varphi$ è primitiva di $(f\circ\varphi)\varphi'$

e allora $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) =$

FINE DIM.

<u>Esempio</u> $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$



uso la sostituzione $x = \sin(t)$; "$dx = \cos(t)\,dt$"

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\varphi(t) = \sin(t)$ $\qquad \varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$\int_0^{\pi/2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\cos(t)\,dt =$$

$0 \le t \le \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - 0 + \underbrace{\frac{\sin(\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{4}}_{0}$$

dà contributo nullo